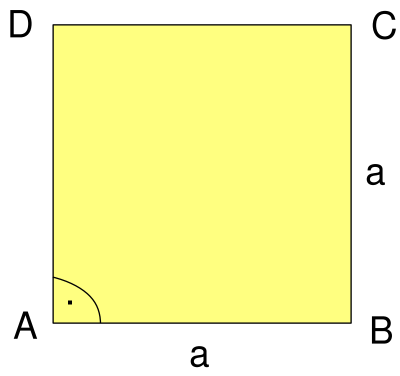
Das Quadrat

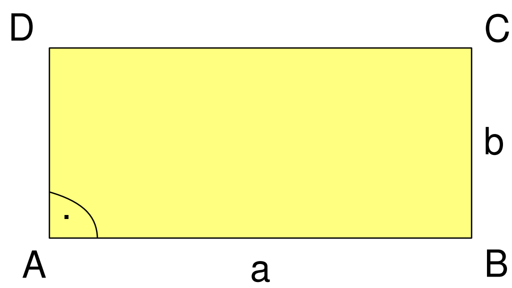


Fläche des Quadrates: $A = a^2$

Umfang des Quadrates: $U = 4 \cdot a$

Alle vier Seiten des Quadrates sind gleich lang. Benachbarte Seiten stehen senkrecht aufeinander.

Das Rechteck

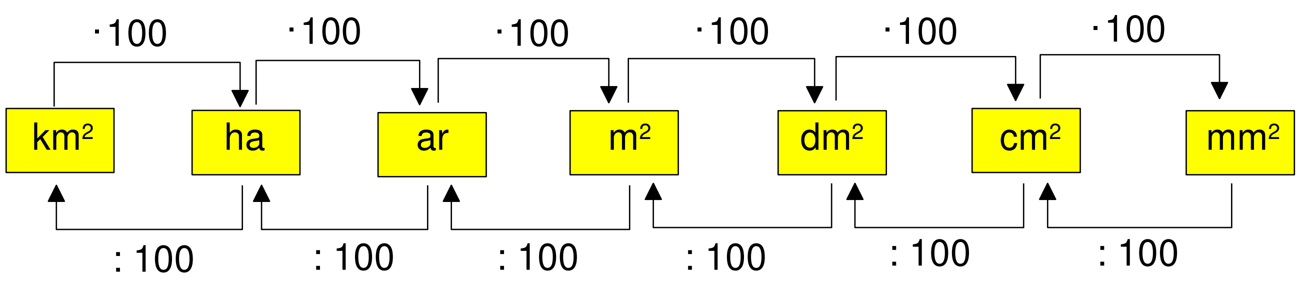


Fläche des Rechtecks: $A = a \cdot b$

Umfang des Rechtecks: $U = 2a + 2b$

Bei einem Rechteck sind die gegenüber liegenden Seiten gleich lang und parallel zueinander. Benachbarte Seiten stehen senkrecht aufeinander.

Umrechnungen von Flächenmaßen



Beispiele: 1) Ein Quadrat hat eine Seitenlänge von 3,8 m. Wie groß ist seine Fäche und wie groß ist sein Umfang? $A = a^2 = (3{,}8\text{ m})^2 = \underline{14{,}44\text{ m}^2}$; $U = 4a = 4 \cdot 3{,}8\text{ m} = \underline{15{,}2\text{ m}}$

2) Ein Rechteck ist 2,2 m breit und 4,8 m lang. Wie groß ist seine Fläche und wie groß ist sein Umfang? $A = a \cdot b = 2{,}2 \cdot 4{,}8 = \underline{10{,}56\text{ m}^2}$; $U = 2a + 2b = 2 \cdot 2{,}2 + 2 \cdot 4{,}8 = \underline{14\text{ m}}$

3) Rechne in die angegebenen Maße um.

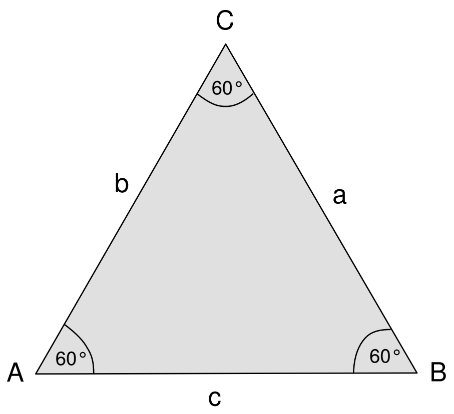
a) 1200 cm² = 12 dm²

b) 0,04 m² = 400 cm²

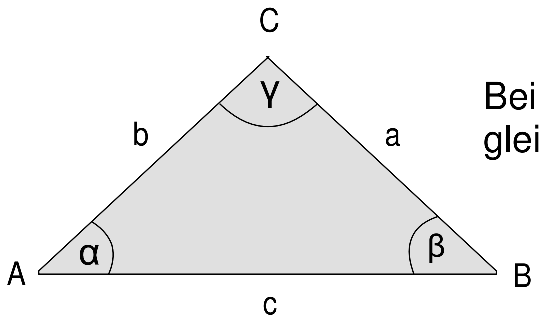
c) 42 ar = 0,42 ha

d) 4800 m² = 48 ar

Dreiecke



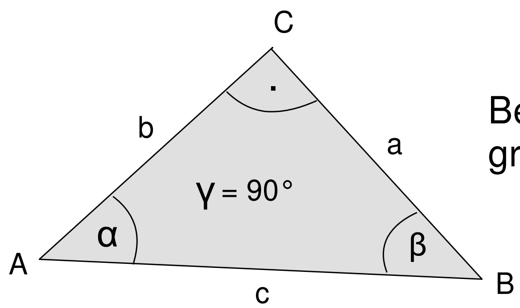
Bei einem gleichseitigen Dreieck sind alle Seiten gleich lang. Jeder Winkel im Dreieck ist 60° groß.



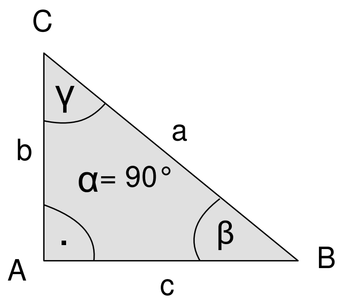
Bei einem gleichschenkligen Dreieck sind zwei Seiten gleich lang. Zwei Winkel sind gleich groß.

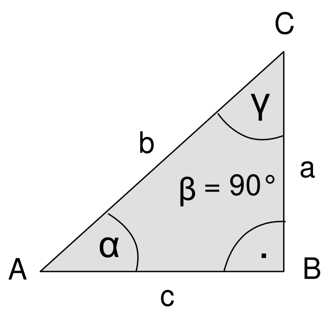
$\alpha = \beta$

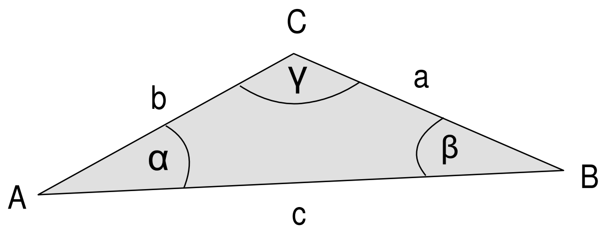
$a = b$



Bei einem rechtwinkligen Dreieck ist ein Winkel 90° groß.





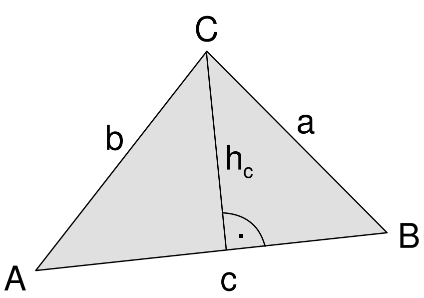


Bei einem stumpfwinkligen Dreieck ist ein Winkel größer als 90°.

Die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180°

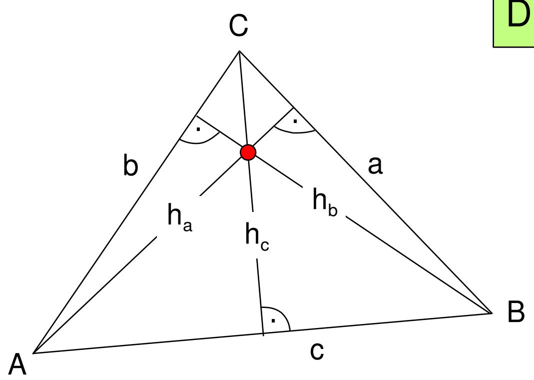
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Für die Fläche des Dreiecks gilt: $A = \frac{\text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}}{2}$



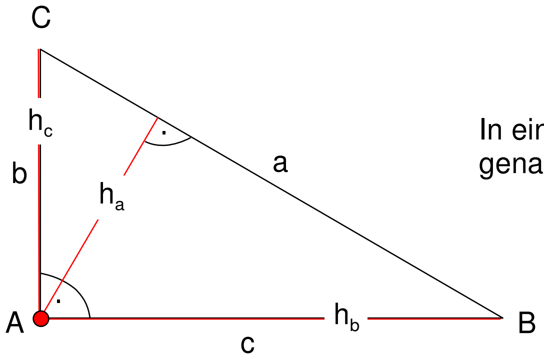
also: $A = \frac{c \cdot h_c}{2}$ bzw. $A = \frac{b \cdot h_b}{2}$ bzw. $A = \frac{a \cdot h_a}{2}$

Die Höhen im Dreieck



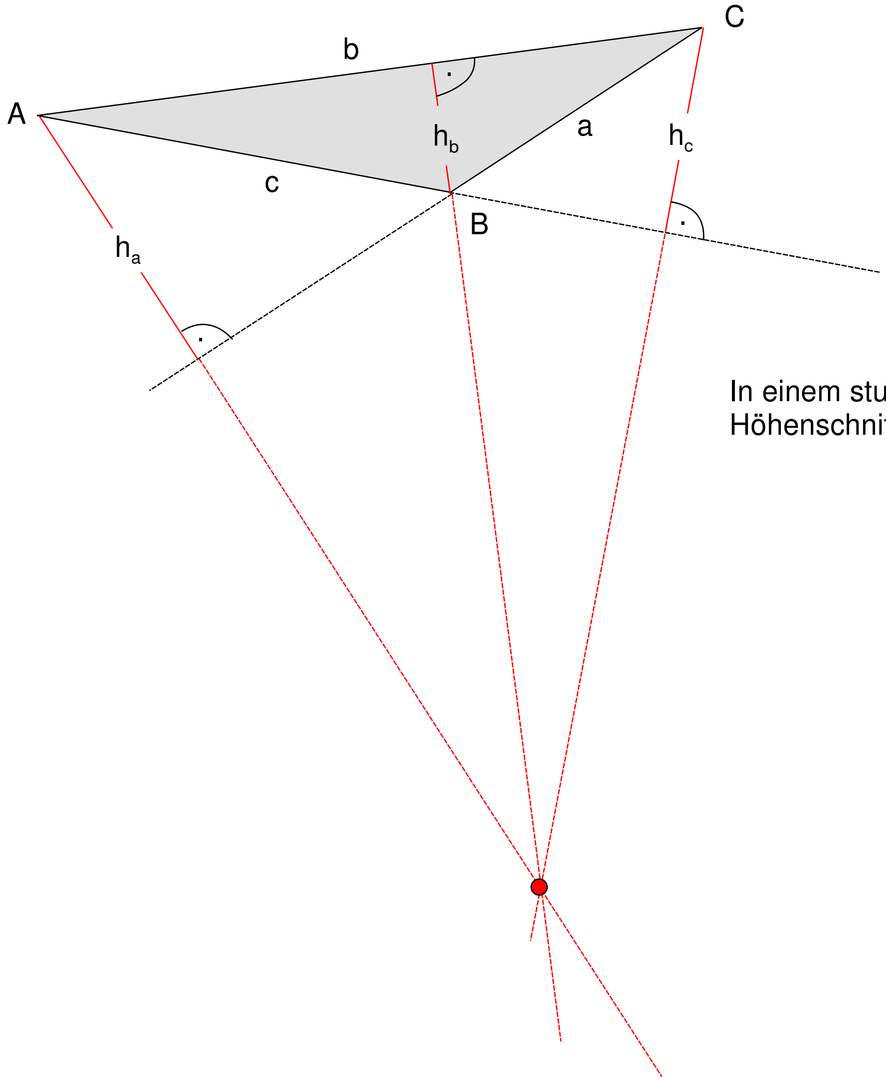
Die Höhen im Dreieck schneiden sich in einem Punkt. Das ist der Höhenschnittpunkt. Jede Höhe steht senkrecht auf einer Dreiecksseite und endet im gegenüber liegenden Punkt.

In einem spitzwinkligen Dreieck liegt der Höhenschnittpunkt innerhalb des Dreiecks.



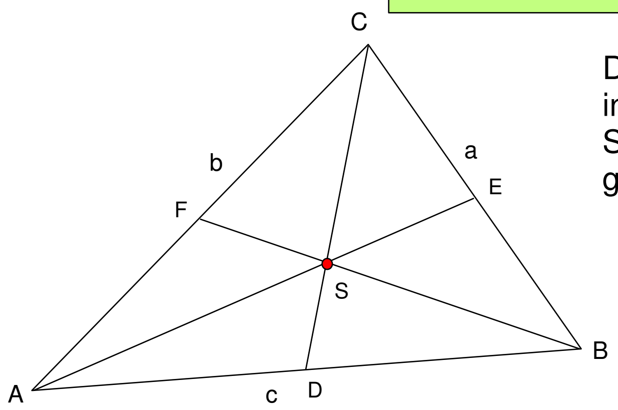
In einem rechtwinkligen Dreieck liegt der Höhenschnittpunkt genau im Scheitel des rechten Winkels.

Es gilt (wenn $\alpha = 90°$): $c = h_b$ bzw. $b = h_c$

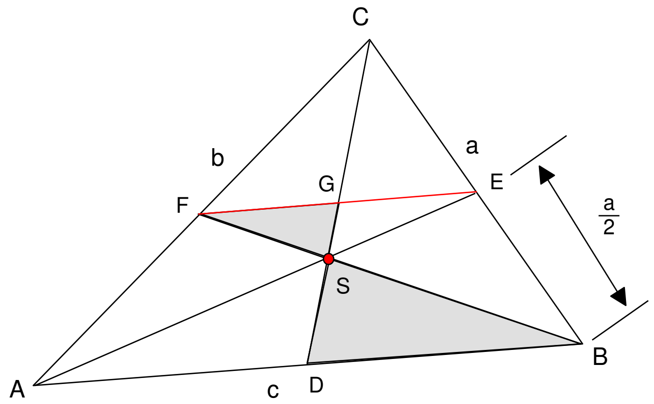


In einem stumpfwinkligen Dreieck liegt der Höhenschnittpunkt außerhalb des Dreiecks.

Die Seitenhalbierenden im Dreieck



Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, dem Schwerpunkt S. Dieser teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 vom Eckpunkt aus gesehen.



EXTRA

Beweis

Es gilt: $\frac{CB}{CE} = \frac{2}{1}$ und $\frac{CD}{CG} = \frac{2}{1}$

$$\frac{CG}{GE} = \frac{CD}{DB} \Rightarrow DB \cdot CG = CD \cdot GE$$

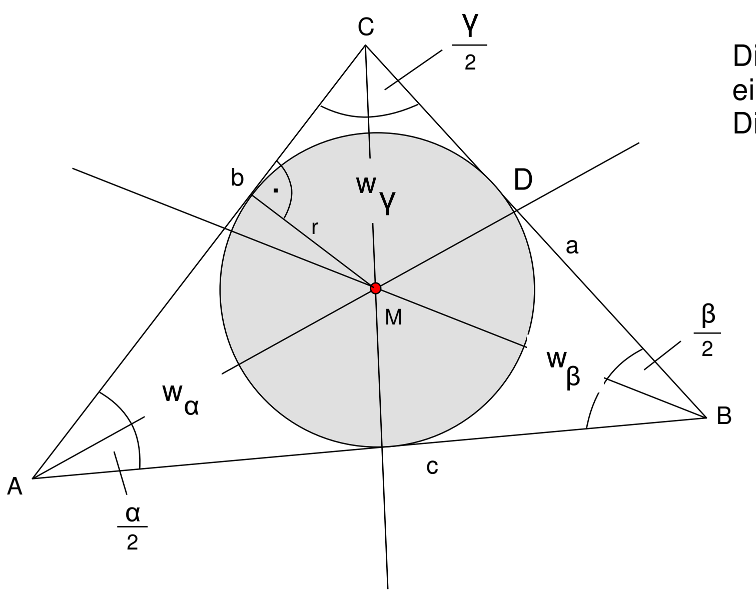
$$\frac{DB}{GE} = \frac{CD}{CG} = \frac{2}{1} \text{ (s.o)}$$

Die Dreiecke DSB und SFG sind ähnlich
(sie stimmen in allen Winkeln überein - WWW)

$$\frac{SB}{SF} = \frac{DB}{FG} \text{ da } FG = GE \Rightarrow$$

$$\frac{SB}{SF} = \frac{DB}{GE} = \frac{2}{1}$$

Die Winkelhalbierenden im Dreieck



Die drei Winkelhalbierenden (der Innenwinkel) eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt des Inkreises.

EXTRA

Jede (Innen-)Winkelhalbierende eines Dreiecks teilt die gegenüber liegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Bsp.: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

Berechnung des Radius r:

Für das Dreieck AMB gilt: $A_1 = \frac{c \cdot r}{2}$

Für das Dreieck BMC gilt: $A_2 = \frac{a \cdot r}{2}$

Für das Dreieck AMC gilt: $A_3 = \frac{b \cdot r}{2}$

$A_{ges} = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{c \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2}$

$A_{ges} = \frac{r}{2}(a + b + c)$ bzw. $\boxed{r = \frac{2A}{(a + b + c)}}$

Beweis: es gilt nach dem Sinussatz in dem Dreieck ABD:

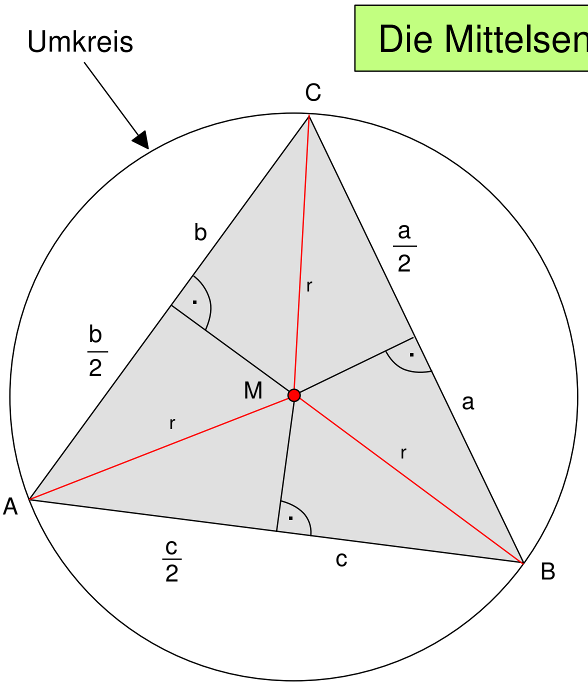
$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{BD} = \frac{\sin\beta}{AD} \Rightarrow AD = \frac{BD \cdot \sin\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ In dem Dreieck ADC gilt: $\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{DC} = \frac{\sin\gamma}{AD}$

$\Rightarrow AD = \frac{DC \cdot \sin\gamma}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ gleichsetzen . . . $\frac{BD \cdot \sin\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{DC \cdot \sin\gamma}{\sin\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$ (1)

im Dreieck ABC gilt: $\frac{\sin\gamma}{AB} = \frac{\sin\beta}{AC} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{AB \cdot \sin\beta}{AC}$ eingesetzt in (1) . . .

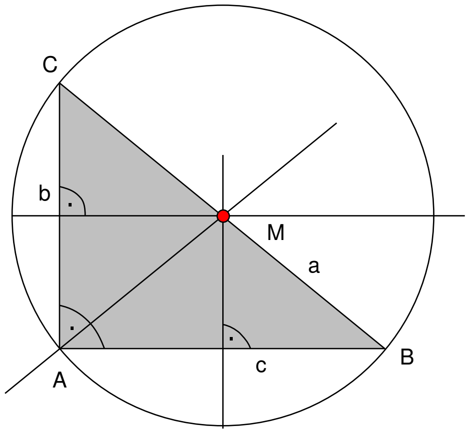
$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB \cdot \cancel{\sin\beta}}{\cancel{\sin\beta} \cdot AC} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

Die Mittelsenkrechten im Dreieck



Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt. Dieser Punkt ist von den drei Ecken des Dreiecks gleich weit entfernt.

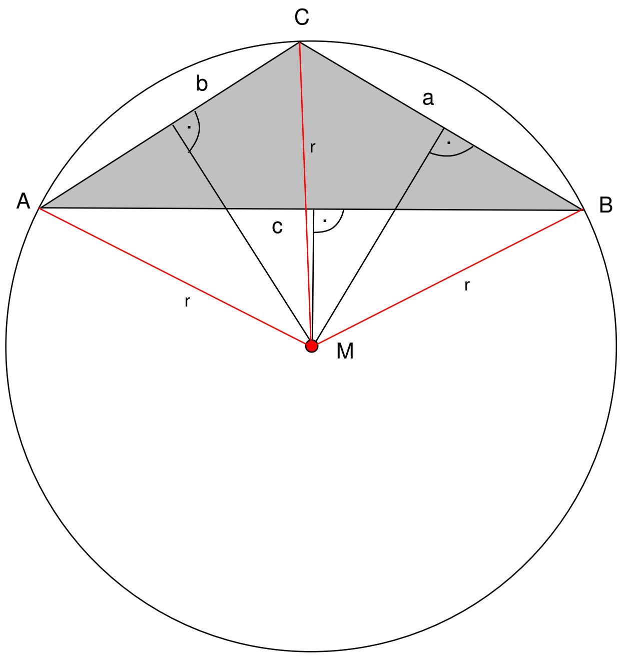
Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks.



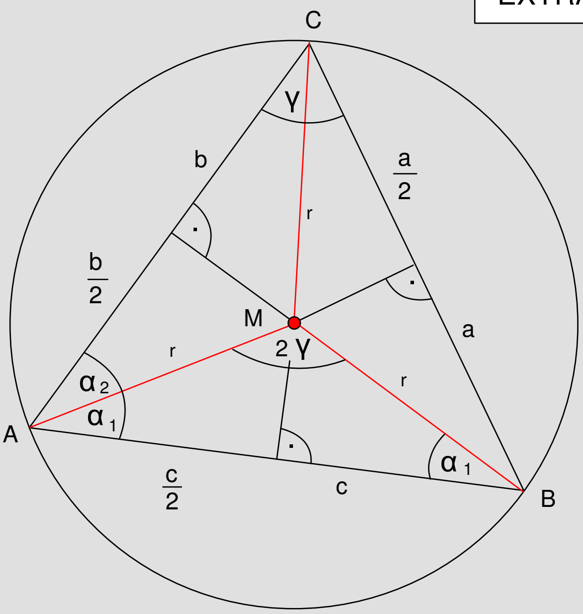
Bei einem spitzwinkligen Dreieck liegt der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten innerhalb des Dreiecks.

Bei einem rechtwinkligen Dreieck liegt der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf der Hypotenuse des Dreiecks.

Bei einem stumpfwinkligen Dreieck liegt der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten außerhalb des Dreiecks.



EXTRA



Es gilt: $\alpha_1 + \alpha_1 + 2\gamma = 180°$

$$2\alpha_1 + 2\gamma = 180°$$

$$\alpha_1 = 90° - \gamma$$

$\cos \alpha_1 = \dfrac{c}{2r}$ Es gilt: $\cos(90° - \gamma) = \sin \gamma$

also . . . $\cos(90° - \gamma) = \dfrac{c}{2r}$

bzw. $\sin \gamma = \dfrac{c}{2r}$ => $\boxed{r = \dfrac{c}{2 \sin \gamma}}$

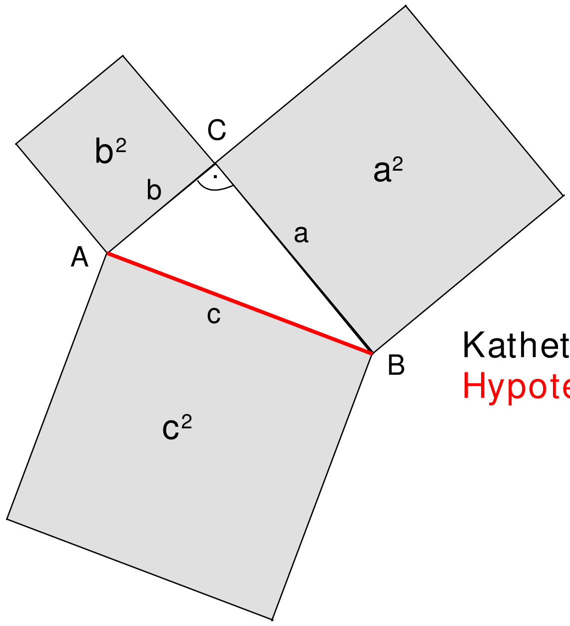
entsprechend gilt: $\boxed{r = \dfrac{a}{2 \sin \alpha}}$

$$\boxed{r = \dfrac{b}{2 \sin \beta}}$$

AG

Sätze am rechtwinkligen Dreieck

Der Satz des Pythagoras



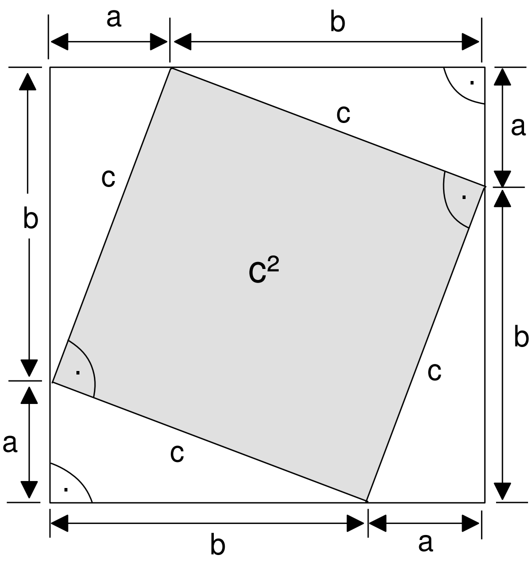
In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate über den Katheten gleich dem Quadrat über der Hypothenuse.

$a^2 + b^2 = c^2$ bzw.

$b^2 = c^2 - a^2$ bzw.

$a^2 = c^2 - b^2$

Katheten: a, b
Hypotenuse: c



Beweis:

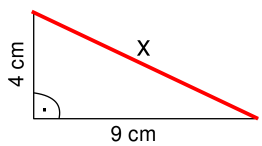
Das große Quadrat hat den Flächeninhalt $A = (a + b)^2$
Das große Quadrat besteht aus einem innen liegenden Quadrat mit der Fläche c^2 und aus vier Dreiecken, die jeweils die Fläche $A_D = \frac{a \cdot b}{2}$ haben.

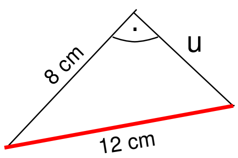
Also gilt:

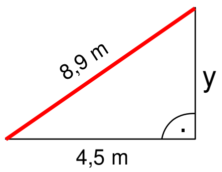
$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} = c^2 + 2ab$

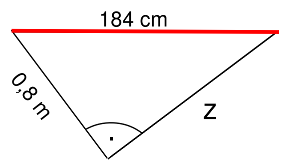
bzw. $a^2 + \cancel{2ab} + b^2 = c^2 + \cancel{2ab}$ also $\underline{a^2 + b^2 = c^2}$

Beispiele: Berechne jeweils die fehlende Seite der rechtwinkligen Dreiecke.









$x^2 = 4^2 + 9^2$

$x = \sqrt{16 + 81}$

$x = \sqrt{97}$ = 9,85 cm

$u^2 = 12^2 - 8^2$

$u = \sqrt{144 - 64}$

$u = \sqrt{80}$ = 8,94 cm

$y^2 = 8{,}9^2 - 4{,}5^2$

$y = \sqrt{79{,}21 - 20{,}25}$

$y = \sqrt{58{,}96}$ = 7,68 m

$z^2 = 184^2 - 80^2$

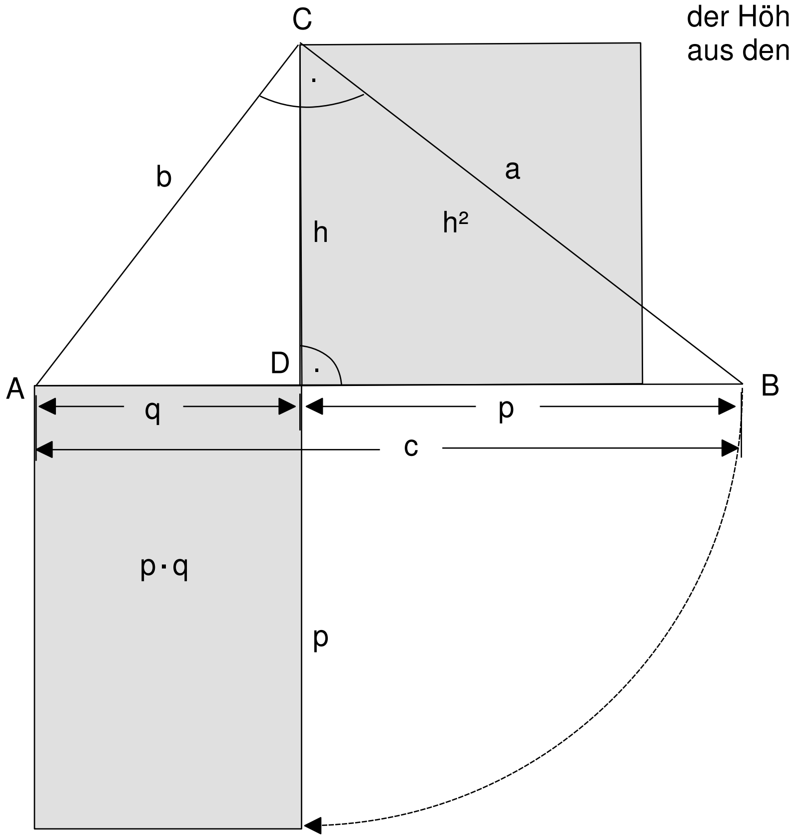
$z = \sqrt{33856 - 6400}$

$z = \sqrt{27456}$ = 165,70 cm

Der Höhensatz

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe flächengleich dem Rechteck gebildet aus den beiden Hypotenusenabschnitten.

$$\boxed{h^2 = p \cdot q}$$



EXTRA

1

Beweis: In dem Dreieck ADC gilt: $h^2 = b^2 - q^2$ und in dem Dreieck DBC gilt: $h^2 = a^2 - p^2$

außerdem gilt in dem Dreieck ABC: $a^2 = c^2 - b^2$

einsetzen

$h^2 = c^2 - b^2 - p^2$ da $c = p + q$ folgt daraus: $h^2 = (p + q)^2 - b^2 - p^2$

aus Formel 1 folgt: $b^2 = h^2 + q^2$

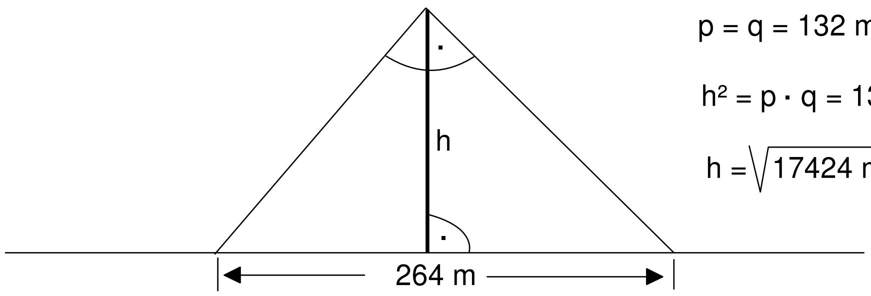
einsetzen

also $h^2 = (p + q)^2 - (h^2 + q^2) - p^2$

$h^2 = \cancel{p^2} + 2pq + \cancel{q^2} - h^2 - \cancel{q^2} - \cancel{p^2}$

$2\,h^2 = 2\,pq \;\Rightarrow\; \underline{h^2 = p \cdot q}$

Beispiel: Ein Funkturm ist unter anderem durch zwei gleich lange Seile nach entgegengesetzten Seiten abgesichert. Die Enden der Seile am Erdboden sind 264 m voneinander entfernt. Wie hoch ist der Turm, wenn die Seilenden an der Spitze einen rechten Winkel bilden und der Durchhang der Seile vernachlässigt wird?



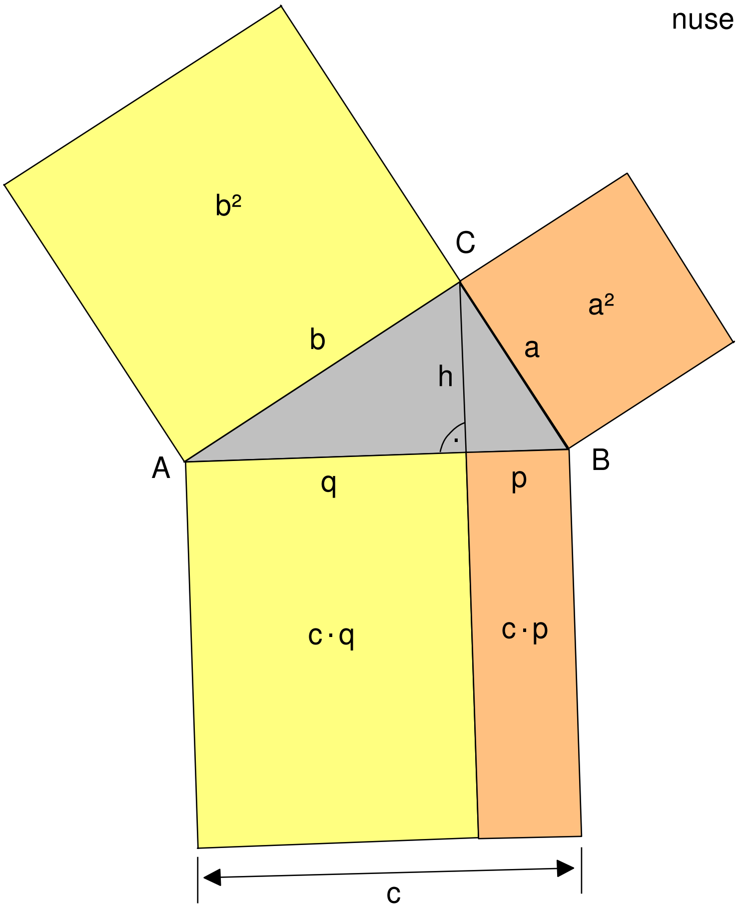
$p = q = 132$ m

$h^2 = p \cdot q = 132 \cdot 132 = 17424$ m²

$h = \sqrt{17424 \text{ m}^2} = 132$ m

Die Kathetensätze

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete flächengleich zum Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.



$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$

EXTRA

Beweis: Es gilt $h^2 = b^2 - q^2$ und $h^2 = a^2 - p^2$

da $h^2 = h^2 \Rightarrow$

$b^2 - q^2 = a^2 - p^2$ oder

$b^2 - a^2 = q^2 - p^2$

eingesetzt

außerdem gilt: $a^2 = c^2 - b^2$ also

$b^2 - (c^2 - b^2) = q^2 - p^2$

$b^2 - c^2 + b^2 = q^2 - p^2$

$2b^2 - c^2 = q^2 - p^2$ . . . da $c = p + q \Rightarrow$

$2b^2 - (p + q)^2 = q^2 - p^2$

$2b^2 - (p^2 + 2qp + q^2) = q^2 - p^2$

$2b^2 - \cancel{p^2} - 2qp - q^2 = q^2 - \cancel{p^2}$

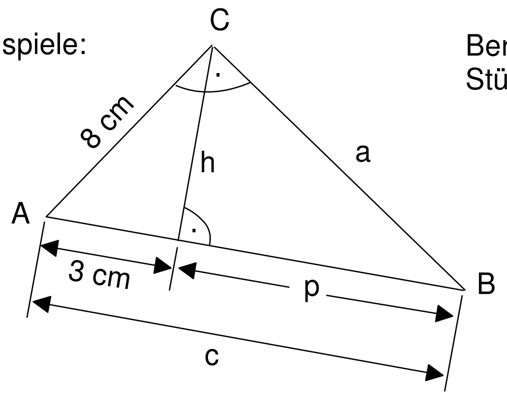
$2b^2 = 2q^2 + 2qp \quad | :2$

$b^2 = q^2 + qp$ ausklammern

$b^2 = q\,(q + p)$ da $q + p = c \Rightarrow$

$\underline{b^2 = q \cdot c}$

Beispiele:



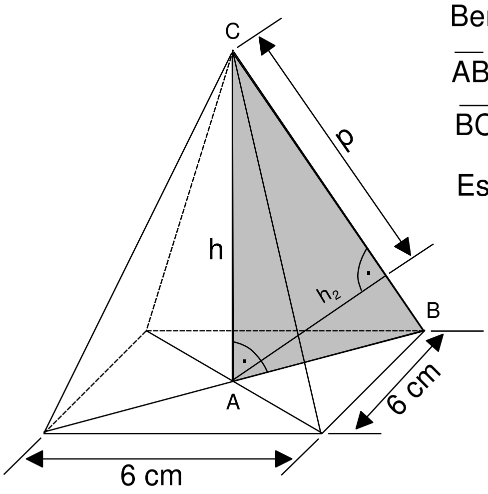
Berechne von dem nebenstehenden Dreieck die fehlenden Stücke.

$h^2 = 8^2 - 3^2 = 55$; $h = \sqrt{55} = \underline{7{,}42 \text{ cm}}$

$h^2 = p \cdot q \Rightarrow p = \dfrac{h^2}{q} = \dfrac{55}{3} = \underline{18{,}3 \text{ cm}}$

$c = p + q = 3 + 18{,}3 = \underline{21{,}3 \text{ cm}}$

$a^2 = p \cdot c \Rightarrow a = \sqrt{18{,}3 \cdot 21{,}3} = \underline{19{,}7 \text{ cm}}$



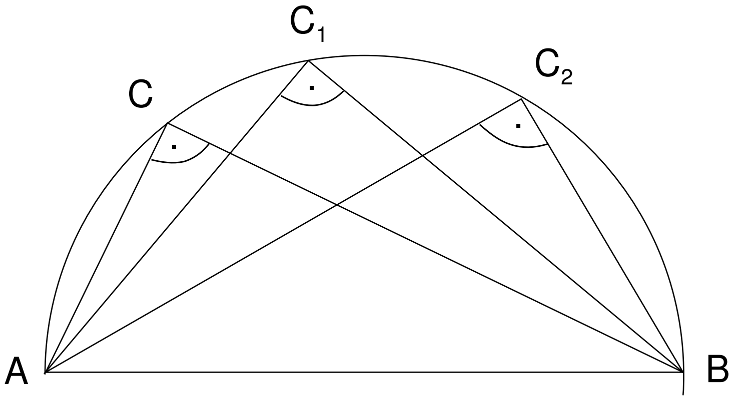
Berechne das Teilstück p, wenn h = 12 cm lang ist.

$\overline{AB}^2 + \overline{AB}^2 = 6^2 \Rightarrow 2\overline{AB}^2 = 36 \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{18} = 4{,}24 \text{ cm}$

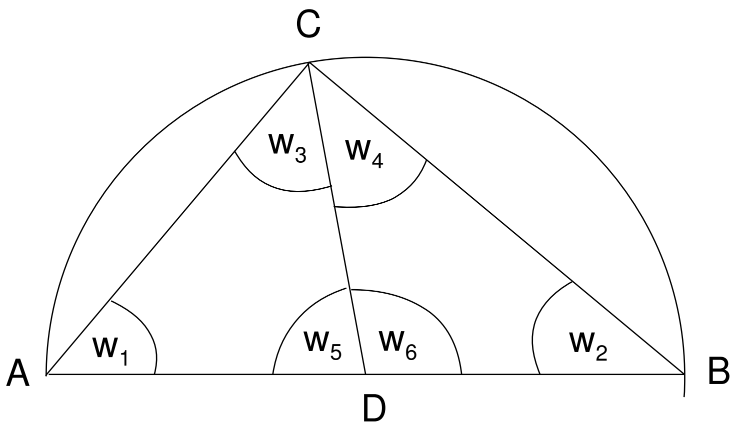
$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + h^2 \Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{18 + 144} = 12{,}73 \text{ cm}$

Es gilt: $h^2 = p \cdot BC \Rightarrow p = \dfrac{h^2}{BC} = \dfrac{144}{12{,}73} = \underline{11{,}31 \text{ cm}}$

Der Satz des Thales



Jeder Winkel, dessen Schenkel durch A und B gehen, und dessen Scheitel auf dem Umfang des Halbkreises über AB liegt, ist ein rechter Winkel.



Beweis

Die Dreiecke ADC und DBC sind gleichschenklig!

$w_1 = w_3$ und $w_2 = w_4$

$w_1 + w_3 + w_5 = 180°$
$w_2 + w_4 + w_6 = 180°$

also

$2\,w_3 + w_5 = 180°$
$2\,w_4 + w_6 = 180°$

außerdem

$w_5 = 180° - 2\,w_3$
$w_6 = 180° - 2\,w_4$

$w_5 + w_6 = 180°$

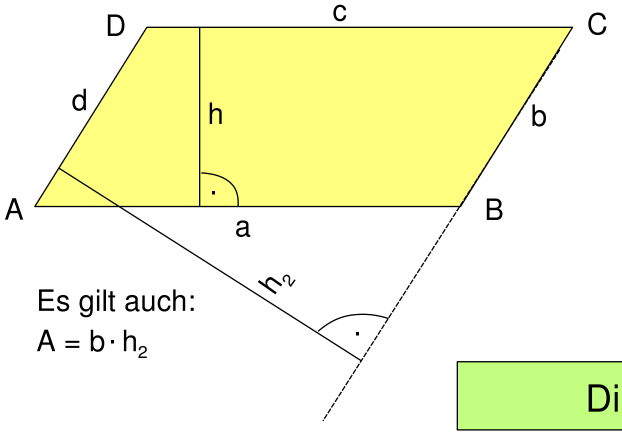
$180° - 2\,w_3 + 180° - 2\,w_4 = 180°$

$-2\,w_3 - 2\,w_4 = -180°$

$2\,(w_3 + w_4) = 180°$

$w_3 + w_4 = 90°$

Das Parallelogramm



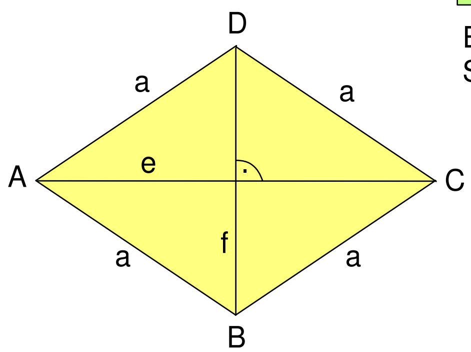
Es gilt auch:
$A = b \cdot h_2$

Fläche des Parallelogramms: $A = a \cdot h$
Fläche = Grundseite · Höhe

Bei einem Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten gleich lang und parallel zueinander.

Umfang des Parallelogramms: $U = a + b + c + d$

Die Raute



e, f = Diagonalen

Eine Raute oder Rhombus ist ein ebenes Viereck, bei dem alle vier Seiten gleich lang und paarweise parallel sind.

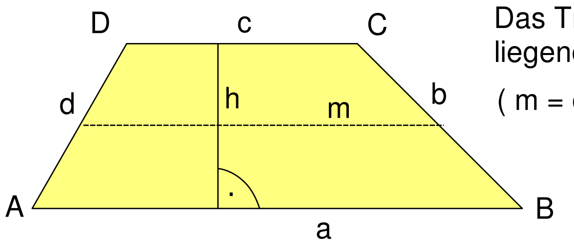
Für die Fläche des Dreiecks ACD gilt: $A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot \frac{f}{2} = \frac{e \cdot f}{4}$

Das Dreieck ACD ist genauso groß wie das Dreieck ABC =>

$A_{Raute} = \frac{e \cdot f}{4} \cdot 2 = \frac{e \cdot f}{2}$

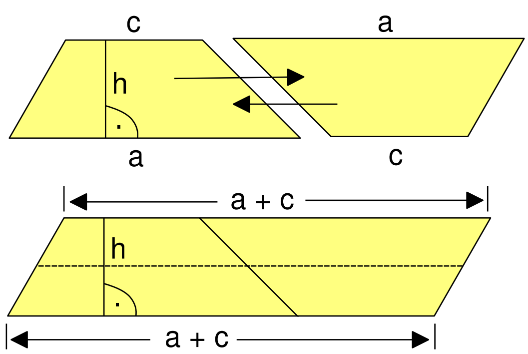
$\boxed{A = \frac{e \cdot f}{2}}$ $\boxed{U = 4a}$

Das Trapez



Das Trapez ist ein ebenes Viereck mit zwei parallel zueinander liegenden Seiten.

(m = die Mittelparallele)

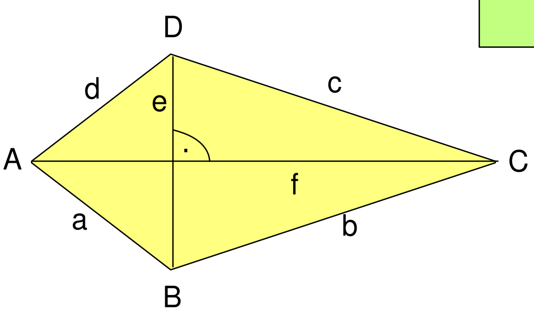


Zwei gleiche Trapeze werden in der abgebildeten Form zu einem Parallelogramm zusammengesetzt.

Für die gesamte Fläche des Parallelogramms gilt: $A = (a + c) \cdot h$

Für die Trapezfläche folgt daraus: $\boxed{A_T = \frac{a + c}{2} \cdot h}$

Der Drachen

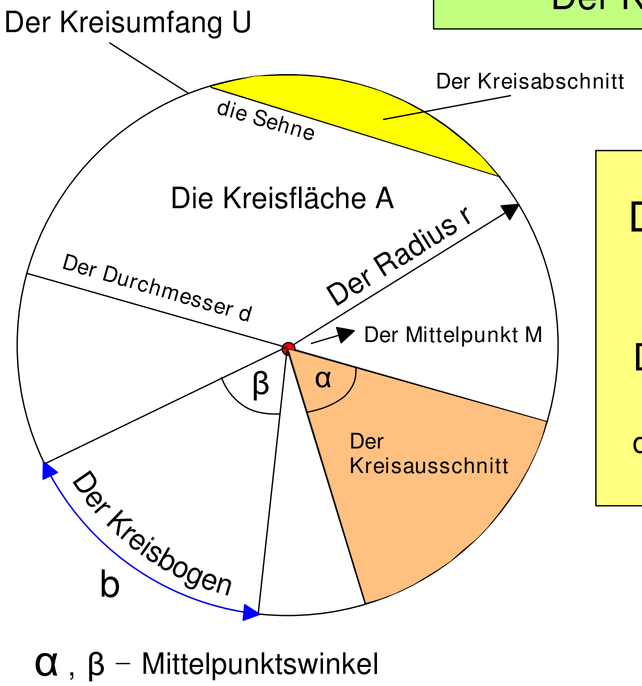


Ein Viereck heißt Drachenviereck oder Deltoid, wenn es symmetrisch zu einer Diagonalen ist.

Die Fläche des Drachenvierecks leitet sich genauso wie die Fäche der Raute her. Es gilt:

$\boxed{A = \frac{e \cdot f}{2}}$ $\boxed{U = 2a + 2b}$

Der Kreis



α , β − Mittelpunktswinkel

Die Kreisfläche $A = r^2 \pi$ $\Rightarrow r = \sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$

Der Kreisumfang $U = 2 \pi r$ $\Rightarrow r = \dfrac{U}{2\pi}$

da $r = \dfrac{d}{2}$ $\Rightarrow$ $U = d\pi$

Der Kreisausschnitt

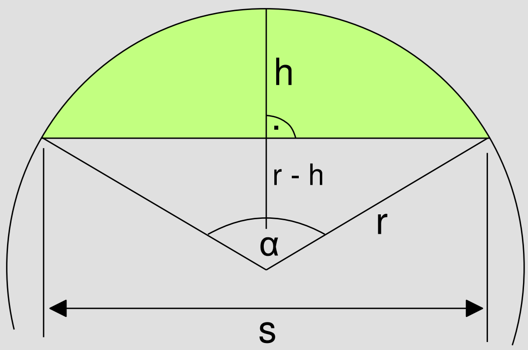
Es gilt: $\dfrac{A_{KA}}{A_{ges}} = \dfrac{\alpha}{360°}$ $\Rightarrow$ $A_{KA} = \dfrac{A_{ges} \cdot \alpha}{360°}$ bzw. $A_{KA} = \dfrac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360°}$

Der Kreisbogen

Es gilt: $\dfrac{U}{b} = \dfrac{360°}{\alpha}$ $\Rightarrow b = \dfrac{U \cdot \alpha}{360°}$ bzw. $b = \dfrac{2 \pi r \alpha}{360°}$; $b = \dfrac{\pi r \alpha}{180°}$

Der Kreisabschnitt

EXTRA



Für die Fläche gilt: $A = \dfrac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360°} - \dfrac{s\,(r - h)}{2}$ (1)

$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{s}{2r}$ $\Rightarrow s = 2r \sin\dfrac{\alpha}{2}$

$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{r - h}{r}$ $\Rightarrow r - h = r \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}$

eingesetzt in Gl. 1:

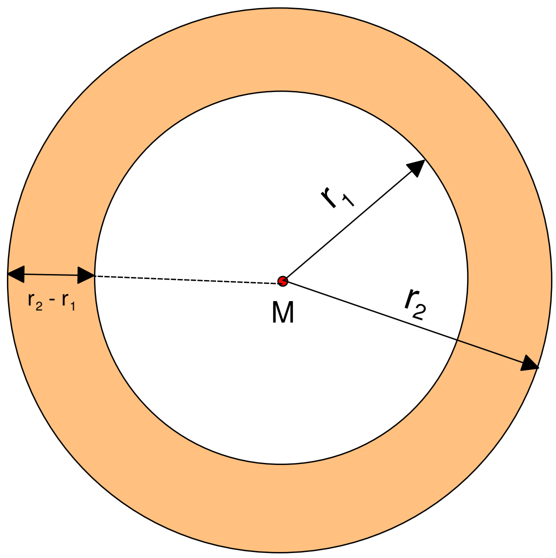
$$A = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360°} - \frac{2r \sin\frac{\alpha}{2}\; r \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{2}$$

$$\boxed{A = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360°} - r^2 \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2}}$$

Beispiel: $r = 10$ cm ; $\alpha = 40°$

$$A = \frac{10^2\, \pi\, 40°}{360°} - 10^2 \sin 20° \cdot \cos 20° = 2{,}75 \text{ cm}^2$$

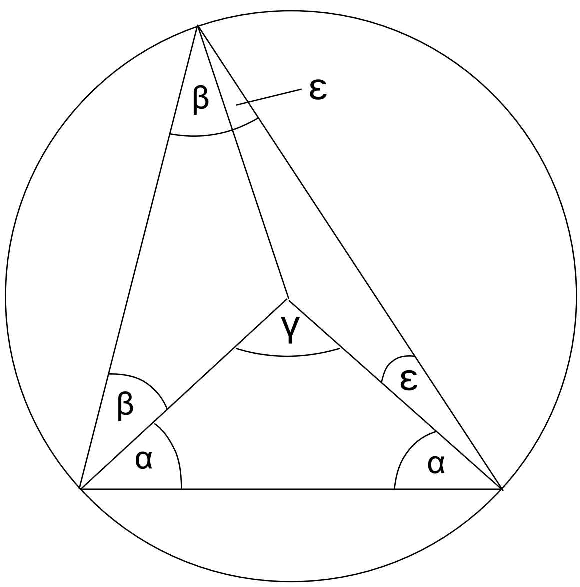
Der Kreisring



Fläche des Kreisringes:

$$A = r_2^2 \pi - r_1^2 \pi = \pi (r_2^2 - r_1^2)$$

Mittelpunktswinkel und Umfangswinkel



Es gilt: $\gamma = 180° - 2\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 90° - \frac{\gamma}{2}$

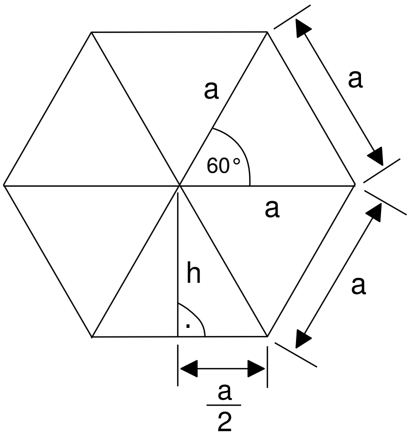
und $2\alpha + 2\beta + 2\varepsilon = 180°$ einsetzen

$\beta + \varepsilon = 90° - \alpha$

$\beta + \varepsilon = 90° - \left(90° - \frac{\gamma}{2} \right)$

$\boxed{\text{also: } \beta + \varepsilon = \frac{\gamma}{2}}$

Das regelmäßige Vieleck



Die Fläche eines regelmäßigen 6-Ecks mit der Kantenlänge a

$$A_{ges} = \frac{6 \cdot a \cdot h}{2} = 3 \cdot a \cdot h \qquad (1)$$

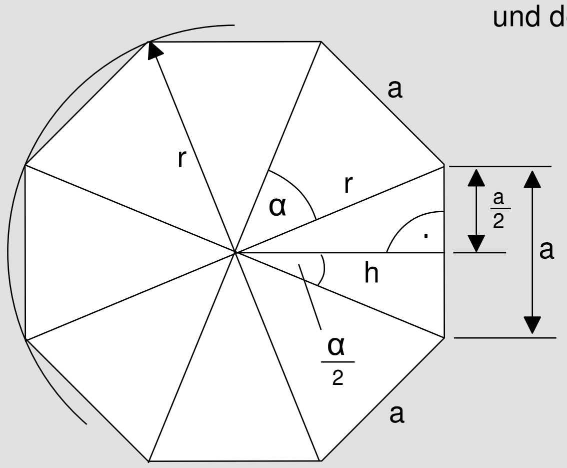
Es gilt: $a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}\, a^2$

also $h = \sqrt{\frac{3}{4}\, a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ eingesetzt in Gl. (1) =>

$$A_{ges} = 3 \cdot a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \underline{\underline{\frac{3\, a^2}{2}\sqrt{3}}}$$

EXTRA

Die Fläche eines regelmäßigen n-Ecks mit der Kantenlänge a und dem Umkreisradius r.



$$A_{ges} = n\,\frac{a \cdot h}{2}$$

Es gilt: $h^2 = r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} \qquad (1)$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2\,r} \Rightarrow r = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

also $r^2 = \dfrac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ einsetzen in (1)

$$h = \sqrt{\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 1}$$

Es gilt: $\alpha = \dfrac{360°}{n}$

also ist $h = \dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\frac{180°}{n}} - 1}$

$$A_{ges} = \frac{n\,a}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{\sin^2\frac{180°}{n}} - 1}$$

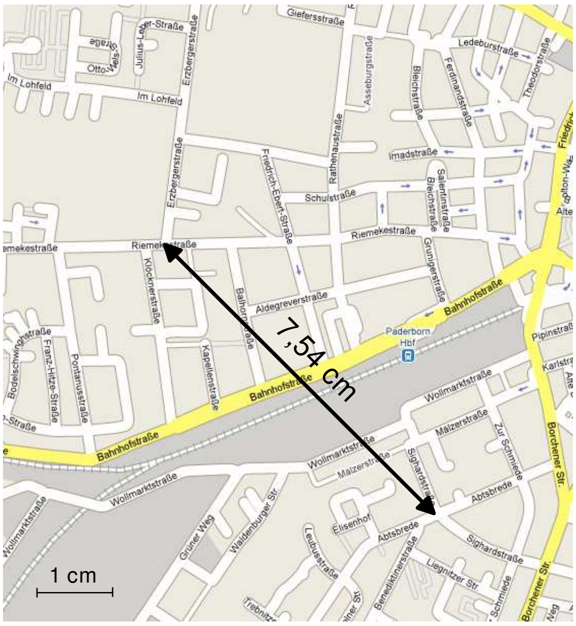
$$\boxed{A_{ges} = \frac{n\,a^2}{4}\sqrt{\frac{1}{\sin^2\frac{180°}{n}} - 1}}$$

Beispiel: Wie groß ist die Fläche eines regelmäßigen 8-Ecks mit einer Kantenlänge von a = 10 cm?

$$A_{ges} = \frac{8 \cdot 10^2}{4}\sqrt{\frac{1}{\sin^2\frac{180°}{8}} - 1} = \underline{482{,}84\ cm^2}$$

Maßstäbe

$$\text{Maßstab} = \frac{\text{Länge in der Zeichnung}}{\text{Länge in Wirklichkeit}}$$



1 : 20000

Der Maßstab 1 : 20000 bedeutet, dass 1 cm auf der Karte in Wirklichkeit 20000 cm sind. Ein cm entspricht also einer Länge von 200 m.

Beispiel:

a) Auf der Karte (s. Abb.) wird eine Strecke von 7,54 cm abgesteckt. Wie lang wäre diese Strecke in Wirklichkeit?

$$\frac{1}{20000} = \frac{7{,}54}{x}$$

$x = 7{,}54 \cdot 20000 = 150800$ cm

Diese Strecke hat eine Länge von 1508 m.

b) Wie lang wäre auf der Karte eine Strecke von 880 m?

$$\frac{1}{20000} = \frac{x}{88000}$$ ← Alle Angaben in cm!

$x = 88000 : 20000 = 4{,}4$ cm

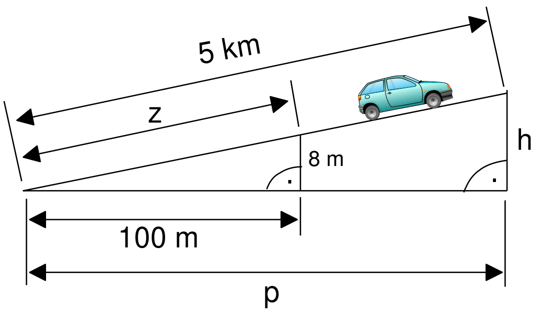
c) Auf einer Karte entsprechen 2,5 cm einer Strecke von 10 km in Wirklichkeit. Welchen Maßstab hat die Karte?

$$\frac{1}{x} = \frac{2{,}5}{1000000}$$

$x = 1000000 : 2{,}5 = 400000$ Der Maßstab beträgt 1 : 400000

Angaben in cm!

d) Eine Straße steigt auf einer Länge von 5 km um 8 %. Wie lang wäre die Straße auf einer Karte im Maßstab 1 : 100000?



Es gilt:

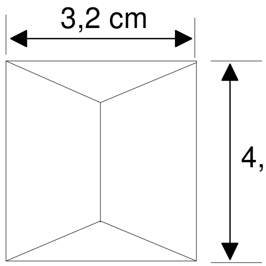
$z = \sqrt{100^2 + 8^2} = 100{,}32$ m

und $\frac{100{,}32}{8} = \frac{5000}{h}$ => $h = 398{,}7$ m

$p = \sqrt{5000^2 - 398{,}7^2} = 4984$ m

$$\frac{1}{100000} = \frac{x}{4984}$$ $\underline{x = 4{,}98 \text{ cm}}$

e) Ein Haus hat auf der Karte im Maßstab 1 : 300 eine Länge von 3,2 cm und eine Breite von 4,2 cm. Wie groß ist seine Grundfläche in Wirklichkeit?



$\frac{1}{300} = \frac{3{,}2}{x}$ => $x = 300 \cdot 3{,}2 = 960$ cm $= 9{,}60$ m

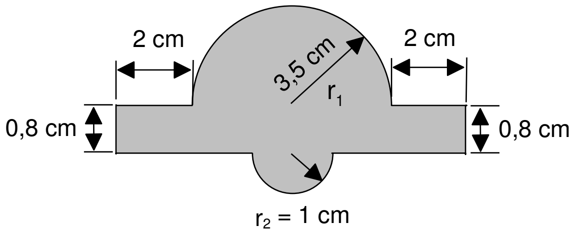
$\frac{1}{300} = \frac{4{,}2}{x}$ => $300 \;\; 4{,}2 = 1260$ cm $= 12{,}60$ m

$A = 9{,}60 \cdot 12{,}60 = \underline{120{,}96 \text{ m}^2}$

Kreis, Kreisausschnitt, Kreisring, Flächensätze am rechtw. Dreieck

1) Berechne jeweils die Fläche und den Umfang der grauen Figur.

a)

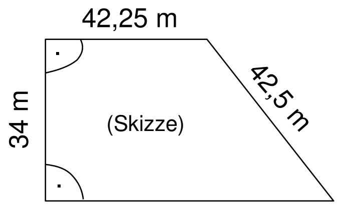


2) Ein Grundstück hat nebenstehende Maße (Skizze).

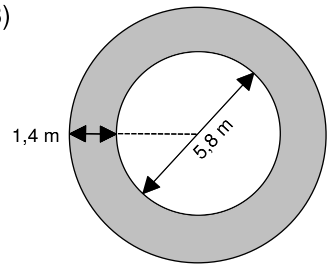
a) Berechne den Umfang des Grundstücks.

b) Das Grundstück soll gegen ein rechteckiges mit gleichem Flächeninhalt ausgetauscht werden, das 40 m breit ist. Berechne die Länge des neuen Grundstücks.

c) Um wie viel Meter ist der Umfang des neuen Grundstücks kleiner als der des alten?



3)

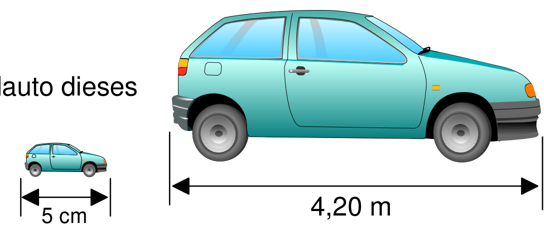


Ein Kindergartenplatz erhält einen kreisförmigen Sandkasten. Um ihn soll ein 1,4 m breiter Weg angelegt werden. Als Belag wird Holzpflaster gewählt. Der Sandkasten hat einen Durchmesser von 5,8 m.

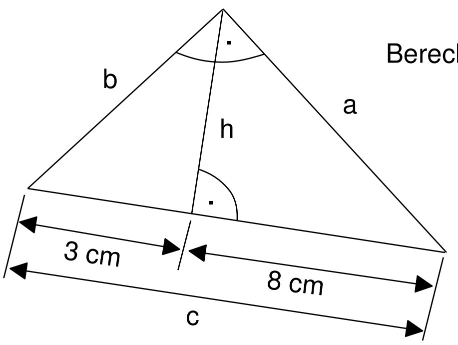
a) Berechne die Gesamtfläche des Weges um den Sandkasten in m².

b) Wie viele Holzpflasterstücke werden benötigt, wenn mit einem Pflasterstück eine Fläche von 1 dm² belegt werden kann.

4) Ein PKW ist 4,20 m lang. In welchem Maßstab ist ein Modellauto dieses PKW's angefertigt worden, wenn es 5 cm lang ist?

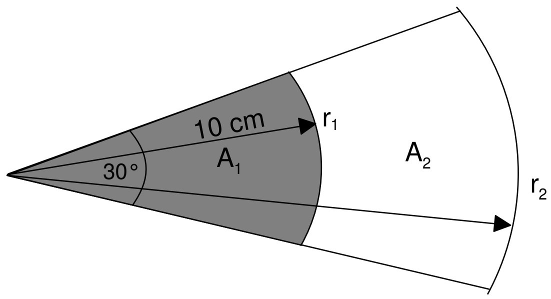


5)



Berechne bei dem abgebildeten Dreieck die noch fehlenden Stücke.

6) Wie groß muss r_2 gewählt werden, wenn die Fläche A_1 genauso groß sein soll wie die Fläche A_2 ?

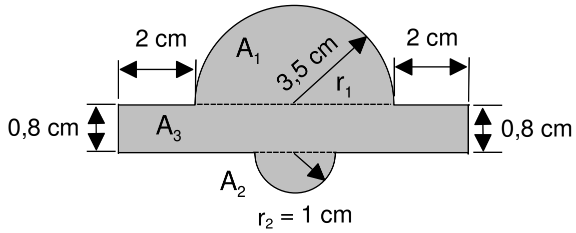


AG

Lösungen / Bewertung

1) Berechne jeweils die Fläche und den Umfang der grauen Figur.

a)



$A_1 = (3{,}5^2\,\pi):2 = 19{,}23\ cm^2$ — 1 P

$A_2 = (1^2\,\pi):2 = 1{,}57\ cm^2$ — 1 P

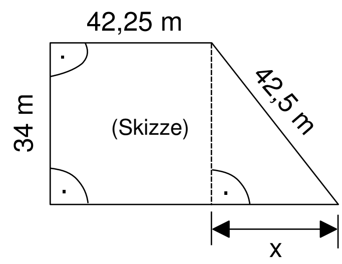
$A_3 = 11 \cdot 0{,}8 = 8{,}8\ cm^2$ — 1 P

$A_g = 19{,}23 + 1{,}57 + 8{,}8 = \underline{29{,}6\ cm^2}$ — 1 P

$U = (2\pi\, 3{,}5) : 2 + (2\,\pi\, 1) : 2 + 2 + 2 + 0{,}8 + 0{,}8 + 9 = \underline{28{,}73\ cm}$ — 3 P

---

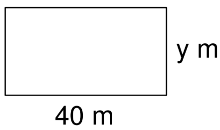
2)



a) $x = \sqrt{42{,}5^2 - 34^2} = 25{,}5\ m$ — 1 P

$U = 34 + 42{,}25 + 42{,}5 + 25{,}5 + 42{,}25 = \underline{186{,}5\ m}$ — 1 P

b) $A = \dfrac{42{,}25 + (42{,}25 + 25{,}5)}{2} \cdot 34 = 1870\ m^2$ — 1 P

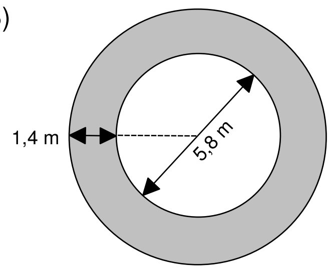


$y = 1870 : 40 = \underline{46{,}75\ m}$ — 1 P

c) $U_2 = 2 \cdot 40 + 2 \cdot 46{,}75 = 173{,}5\ m$; $186{,}5 - 173{,}5 = 13\ m$ Der Umfang des rechteckigen Grundstückes ist 13 m kürzer. — 2 P

---

3)



a) $A = 4{,}3^2\,\pi - 2{,}9^2\,\pi = \underline{31{,}65\ m^2}$ — 2 P

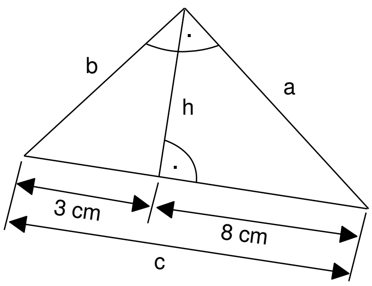
b) $3165\ dm^2 : 1\ dm^2 = \underline{3165}$; man benötigt 3165 Stücke. — 1 P

---

4) $\dfrac{5\ cm}{420\ cm} = \dfrac{1}{x}$ => x = 84 ; also beträgt der Maßstab 1: 84 — 2 P

---

5)



$h^2 = p \cdot q \Rightarrow h = \sqrt{3 \cdot 8} = \underline{4{,}90\ cm}$ — 2 P

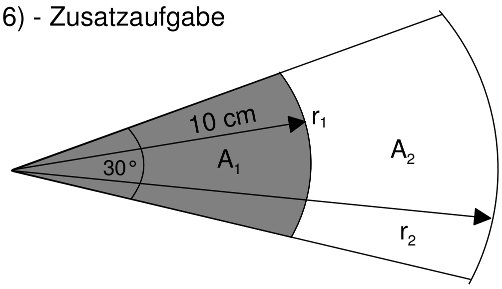
$c = p + q = 3 + 8 = \underline{11\ cm}$ — 1 P

$a^2 = c \cdot p \Rightarrow a = \sqrt{11 \cdot 8} = \underline{9{,}38\ cm}$ — 2 P

$b^2 = c \cdot q \Rightarrow b = \sqrt{11 \cdot 3} = \underline{5{,}74\ cm}$ — 2 P

---

6) - Zusatzaufgabe



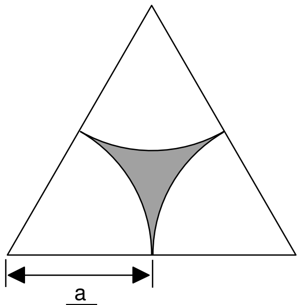
$A_1 = 10^2\,\pi\,\dfrac{30°}{360°} = 26{,}17\ cm^2$ — (2 P)

$A_2 = r_2^2\,\pi\,\dfrac{30°}{360°} = 2 \cdot 26{,}17\ cm^2$ — (1 P)

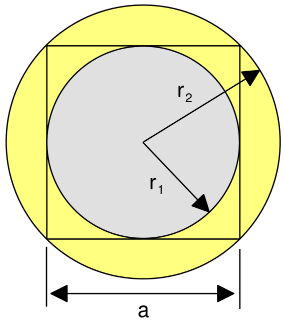
$r_2 = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 26{,}17 \cdot 360}{30 \cdot \pi}} = \underline{14{,}14\ cm}$ — (2 P)

Gesamt: 25 P

1) Berechne die graue Fläche in dem gleichseitigen Dreieck mit der Kantenlänge a = 10 cm.



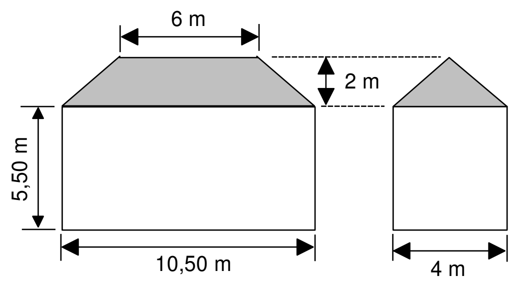
2) Wie groß ist die Fläche des Kreisringes, der durch das Quadrat mit der Kantenlänge a = 2 m festgelegt ist? (s. Skizze)



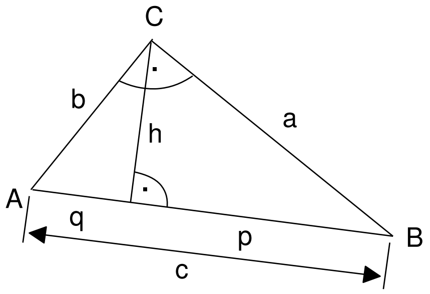
3) Der große Zeiger einer Turmuhr ist 2,40 m lang.
   a) Welche Fläche überstreicht er in 35 Minuten?
   b) Welchen Weg hat die Zeigerspitze in 50 Min. zurückgelegt?

4) Für einen kreisförmigen Tisch mit einem Durchmesser von 1,30 m soll eine Tischdecke genäht werden, die ringsherum 15 cm überhängt. Wie viel m² Stoff werden benötigt?

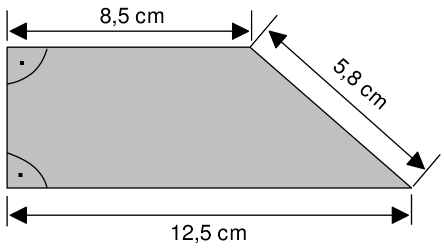
5) In der Skizze siehst du die Vorder- und Seitenansicht eines Hauses. Berechne a) die gesammte Wandfläche und b) die gesamte Dachfläche.



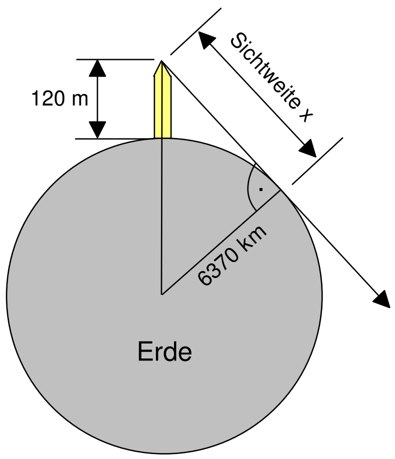
6) Bei einem rechwinkligen Dreieck ist die Höhe 4,2 cm und die Seite b 5,8 cm lang. Berechne die übrigen Teile.



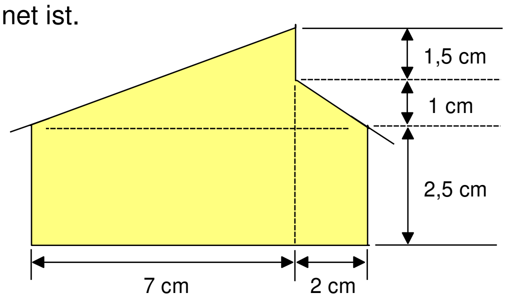
7) Berechne den Umfang und den Flächeninhalt des Trapezes.



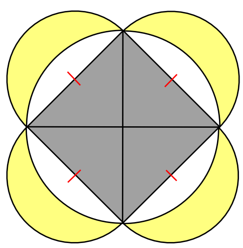
8) Wie weit könnte man von einem 120 m hohen Turm sehen?



9) Eine Giebelwand soll neu gestrichen werden. Pro m² fallen Kosten von 89 € an. Berechne die Gesamtkosten, wenn die Skizze im Maßstab 1 : 200 gezeichnet ist.



10) Berechne den Flächeninhalt der Monde und vergleiche mit dem Flächeninhalt des Quadrates.



Der Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$
Die Kathetensätze: $a^2 = c \cdot p$ bzw. $b^2 = c \cdot q$

Fläche eines Trapezes: $A = \frac{a + c}{2} \cdot h$

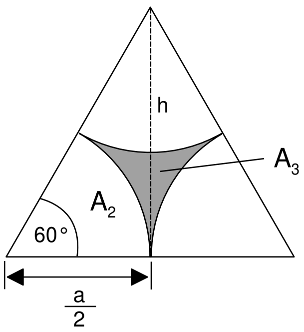
Kreisfläche: $A = r^2 \pi$
Kreisumfang: $U = 2 \pi r$

Kreisausschnitt: $A = r^2 \pi \frac{\alpha}{360°}$

Kreisbogen: $b = 2 \pi r \frac{\alpha}{360°}$

Lösungen / Bewertung

1)



Es gilt: $h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$ bzw. $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

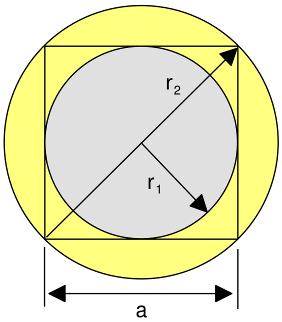
also ist $A = \frac{a \cdot a}{2 \cdot 2}\sqrt{3} = \underline{\frac{a^2}{4}\sqrt{3}}$; $A_2 = \frac{a^2}{4}\pi\,\frac{60°}{360°}$

$A_3 = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} - 3 \cdot \frac{a^2}{4}\pi\,\frac{60°}{360°} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} - \frac{a^2\pi}{8}$

$A_3 = \frac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - \frac{10^2 \cdot \pi}{8} = \underline{4{,}05\ cm^2}$

Berechnung der Dreieckshöhe 2 P
Fläche des Kreisausschnitts 2 P
Fläche des Dreiecks 2 P
gesuchte Fläche 2 P

2) Wie groß ist die Fläche des Kreisringes, der durch das Quadrat mit der Kantenlänge a = 2 m festgelegt ist? (s. Skizze)



$d_2^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{2}$ 2 P

$r_2 = \frac{a}{2}\sqrt{2}$; $r_2 = \frac{2}{2}\sqrt{2} = \underline{1{,}41\ m}$ 1 P

$r_1 = 1\ m$; $A = 2\pi - 1\pi = \underline{3{,}14\ m^2}$ 1 P

3) Der große Zeiger einer Turmuhr ist 2,40 m lang.
a) Welche Fläche überstreicht er in 35 Minuten?
b) Welchen Weg hat die Zeigerspitze in 50 Min. zurückgelegt?

a) $A = 2{,}40^2\,\pi\,\frac{35}{60} = \underline{10{,}55\ m^2}$ 2 P

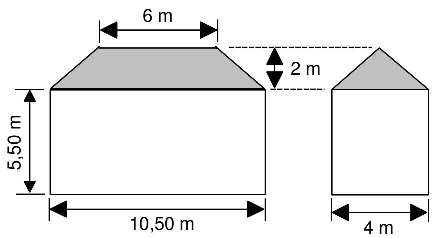
b) $b = 2\,\pi\,2{,}40\,\frac{50}{60} = \underline{12{,}56\ m}$ 2 P

4) Für einen kreisförmigen Tisch mit einem Durchmesser von 1,30 m soll eine Tischdecke genäht werden, die ringsherum 15 cm überhängt. Wie viel m² Stoff werden benötigt?

$r_1 = 0{,}65\ m$
$r_2 = 0{,}8\ m$
2 P

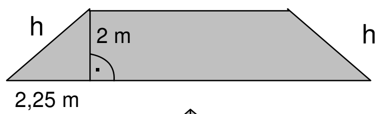
$A = 0{,}8^2\,\pi = \underline{2{,}01\ m^2}$ 1 P

5) In der Skizze siehst du die Vorder- und Seitenansicht eines Hauses. Berechne a) die gesammte Wandfläche und b) die gesamte Dachfläche.

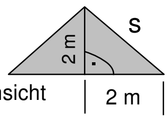


a) $A_W = 2 \cdot 5{,}50 \cdot 10{,}50 + 2 \cdot 4 \cdot 5{,}50 = \underline{159{,}5\ m^2}$ 2 P

b) Dach - Seitenansicht



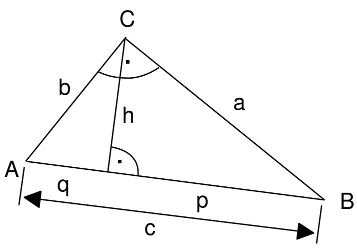
$h = \sqrt{2{,}25^2 + 2^2} = 3\ m$ 2 P



Dach Vorderansicht

$s = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2{,}83\ m$ 2 P $A_D = 2\,\frac{4 \cdot 3}{2} + 2\,\frac{10{,}50 + 6}{2} \cdot 2{,}83 = \underline{35{,}3\ m^2}$ 2 P

6) Bei einem rechwinkligen Dreieck ist die Höhe 4,2 cm und die Seite b 5,8 cm lang. Berechne die übrigen Teile.



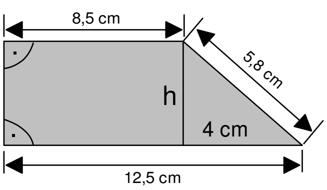
$q = \sqrt{5{,}8^2 - 4{,}2^2} = \underline{4\ cm}$ 2 P

$p = \frac{4{,}2^2}{4} = \underline{4{,}4\ cm}$ 2 P

$c = 4 + 4{,}4 = \underline{8{,}4\ cm}$ 1 P

$a = \sqrt{4{,}4 \cdot 8{,}4} = \underline{6{,}1\ cm}$ 2 P

7) Berechne den Umfang und den Flächeninhalt des Trapezes.



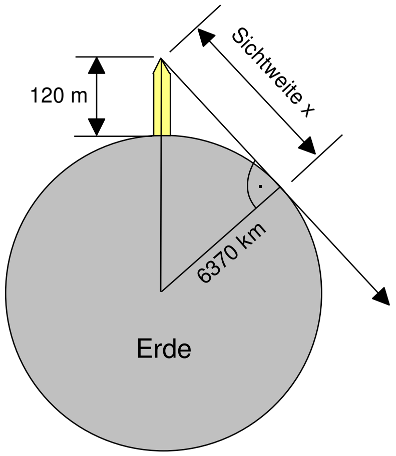
$h = \sqrt{5{,}8^2 - 4^2} = 4{,}2\ cm$ 2 P $U = 12{,}5 + 5{,}8 + 8{,}5 + 4{,}2 = \underline{31\ cm}$ 1 P

$A = \frac{12{,}5 + 8{,}5}{2} \cdot 4{,}2 = \underline{44{,}1\ cm^2}$ 1 P

AG

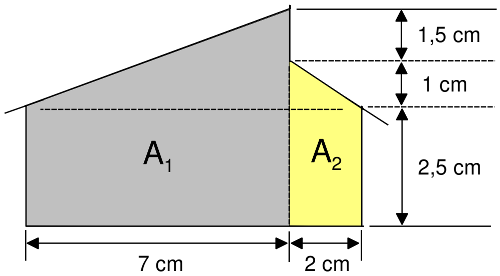
AG

8) Wie weit könnte man von einem 120 m hohen Turm sehen?



$x = \sqrt{6370{,}120^2 - 6370^2} = \underline{39{,}1\text{ km}}$ 3 P

9) Eine Giebelwand soll neu gestrichen werden. Pro m² fallen Kosten von 89 • an. Berechne die Gesamtkosten, wenn die Skizze im Maßstab 1 : 200 gezeichnet ist.



$A_1 = \frac{5 + 2{,}5}{2} \cdot 7 = 26{,}25\text{ cm}^2$

$A_2 = \frac{3{,}5 + 2{,}5}{2} \cdot 2 = 6\text{ cm}^2$

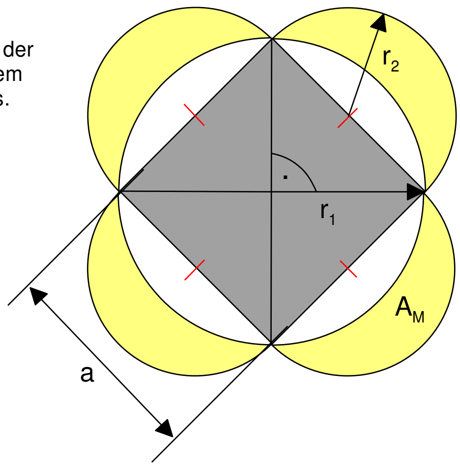
$A_g = 6 + 26{,}25 = 32{,}25\text{ cm}^2$ 5 P

1 cm² entspricht in Wirklichkeit 4 m²
also sind 32,25 cm² in Wirklichkeit $\underline{129\text{ m}^2}$ 2 P

Kosten: 129 · 89 € = $\underline{11481\text{ €}}$ 1 P

10) Zusatzaufgabe

Berechne den Flächeninhalt der Monde und vergleiche mit dem Flächeninhalt des Quadrates.



Fläche des Quadrates: $A_Q = a^2$

$(2r_1)^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$4r_1^2 = 2a^2$ oder $2r_1^2 = a^2 \Rightarrow r_1^2 = \frac{a^2}{2}$

$r_2 = \frac{a}{2} \Rightarrow r_2^2 = \frac{a^2}{4}$

$A_M = \left[\frac{1}{4}a^2 + \frac{r_2^2 \cdot \pi}{2}\right] - \frac{1}{4}r_1^2\,\pi$

also $A_M = \frac{1}{4}a^2 + \frac{a^2\,\pi}{4 \cdot 2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2\,\pi}{2} =$

$\frac{a^2}{4} + \frac{a^2\,\pi}{8} - \frac{a^2\,\pi}{8} = \frac{a^2}{4}$

$\underline{\text{also sind } 4 \cdot A_M = a^2}$ Die vier Monde sind zusammen genauso groß wie das Quadrat!

(4 P)

Gesamt: 49 P

AG

AG

Kreis / Radius / Durchmesser / Umfang / Fläche

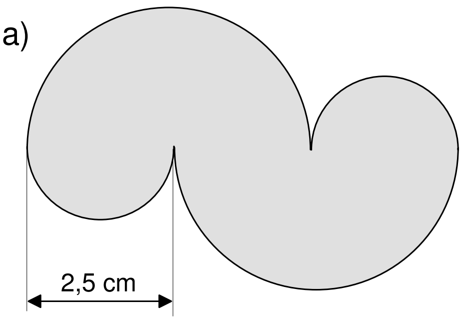
1) Der Radius eines Kreises ist 5,2 cm. Berechne Umfang und Flächeninhalt!

2) Der Flächeninhalt eines Kreises beträgt 78,5 cm². Berechne den Radius des Kreises.

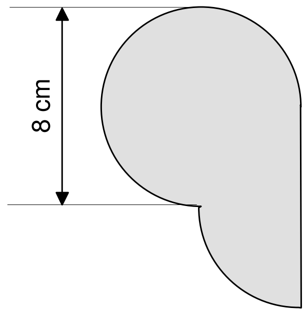
3) Wie groß ist der Durchmesser eines Kreises, wenn sein Umfang 100 cm beträgt?

4) Bestimme den Fächeninhalt der Figuren.

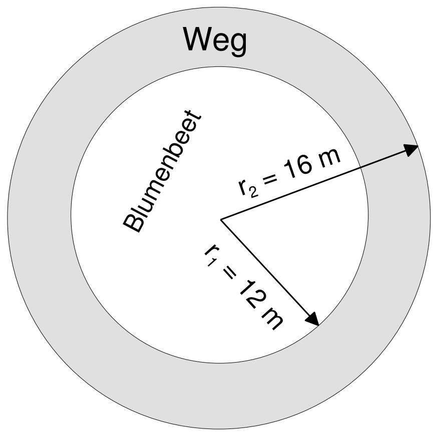
a)



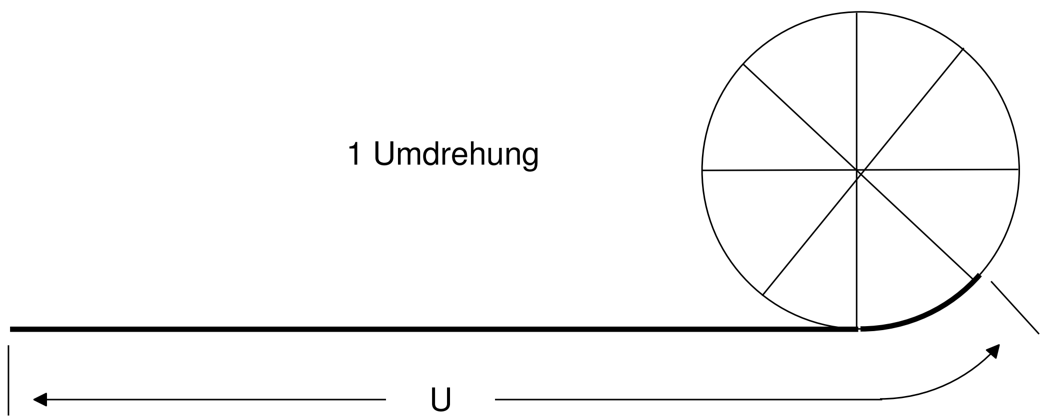
b)



5) Um ein kreisförmiges Blumenbeet wird ein Weg angelegt. Wie groß ist die Fläche des Weges?



6) Wie oft hat sich das Rad eines Fahrrades auf einer Fahrstrecke von 1 km gedreht, wenn es einen Durchmesser von 60 cm hat?



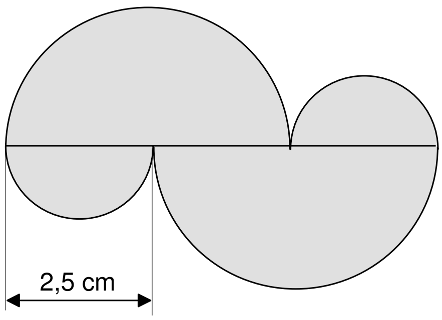
1) $U = 2\pi r = 2 \cdot 5{,}2 \cdot \pi \; = \underline{32{,}656 \text{ cm}}$ 2 P

$A = r^2 \pi = 5{,}2^2 \pi \; = \underline{84{,}906 \text{ cm}^2}$ 2 P

2) $A = 78{,}5 \text{ cm}^2$ $\quad r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{78{,}5 : 3{,}14} = \underline{5 \text{ cm}}$ 3 P

3) $U = 100 \text{ cm}$ $\quad r = U : (2\pi) = 100 : (2 \cdot 3{,}14) = 15{,}924 \text{ cm} \Rightarrow \underline{d = 31{,}848 \text{ cm}}$ 4P

4a)

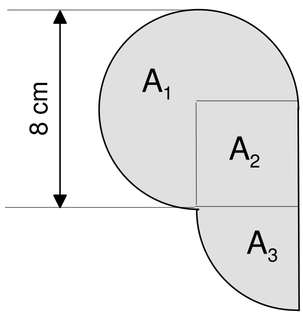


$A_1 = 2{,}5^2 \cdot 3{,}14 = 19{,}625 \text{ cm}^2$

$A_2 = 1{,}25^2 \cdot 3{,}14 = 4{,}9063 \text{ cm}^2$

$A = 19{,}625 + 4{,}9063 = \underline{24{,}5313 \text{ cm}^2}$ 4P

b) Zusatzaufgabe



$A_1 + A_2 = 4^2 \cdot 3{,}14 = 50{,}24 \text{ cm}^2$

$A_2 = 4^2 = 16$

$A = 16 + 50{,}24 = \underline{66{,}24 \text{ cm}^2}$

4P

5) $A = 16^2 \cdot 3{,}13 - 12^2 \cdot 3{,}14 = \underline{351{,}68 \text{ m}^2}$ 3 P

6) $U = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}3 \text{ m} = 1{,}884 \text{ m}$

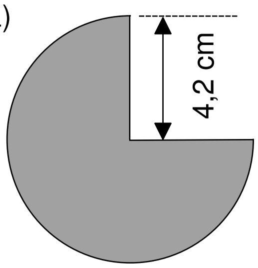
$1000 : 1{,}884 = 530{,}8$

Das Rad dreht sich auf einer Strecke von 1 km <u>530</u> mal. 4P

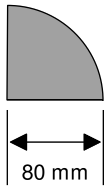
Gesamt: 22 P

1) Berechne den Flächeninhalt der abgebildeten Figuren.

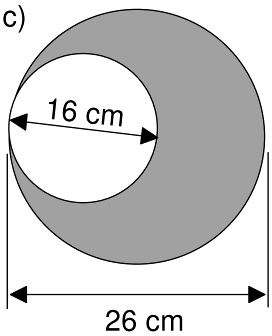
a)



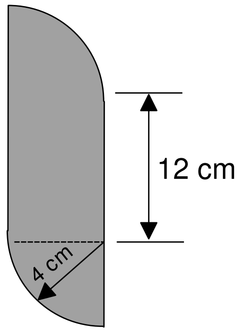
b)



c)



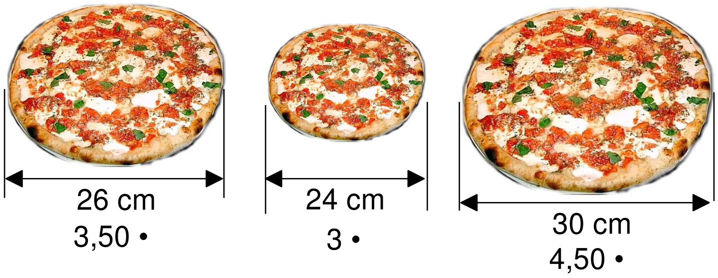
d)



2) Obwohl die Längeneinheit Zoll (") veraltet ist, hat sie sich in manchen Bereichen bis heute gehalten.
1 Zoll = 1 " = 25,4 mm.

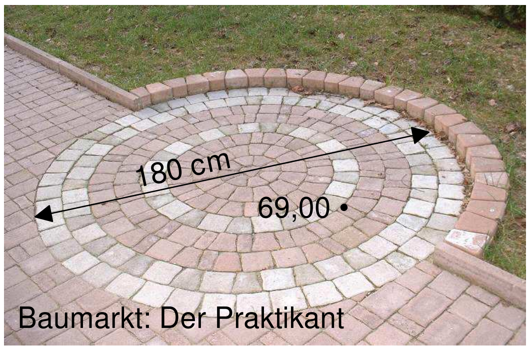
a) Ein Rennrad hat einen Raddurchmesser von 28 ". Wie groß (in cm) ist der Radumfang?
b) Wie oft dreht sich das Rad auf einer Fahrstrecke von 1 km?

3) Eine Pizza wird in drei verschiedenen Größen angeboten:

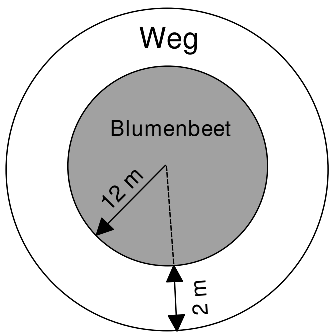


Welche Pizza ist am günstigsten?

4) Frau Krause will ihren Wäscheplatz mit einem Pflasterkreis versehen. Sie vergleicht zwei Angebote:



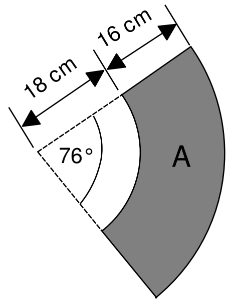
5) Um ein Blumenbeet soll ein kreisförmiger Weg angelegt werden.
a) Berechne die Fläche des Weges
b) Wie viele m³ Kies müssen gekauft werden, wenn die Kiesschicht des Weges 10 cm dick sein soll?



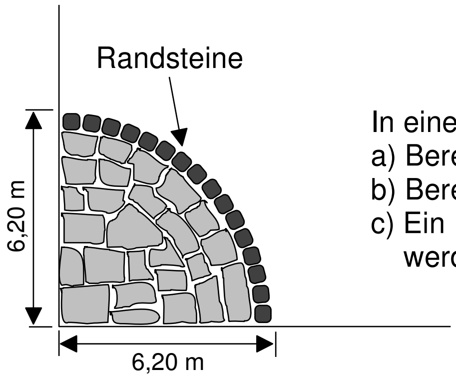
6)

Der große Zeiger einer Turmuhr ist 1,80 m lang.
a) Welchen Weg hat die Spitze des Zeigers in der Zeit von 13.15 Uhr bis 16.45 Uhr zurückgelegt?
b) Welche Fläche überstreicht der große Zeiger in 40 Minuten?

7) Welche Fläche hat das abgebildete Werkstück aus Metall?



8)

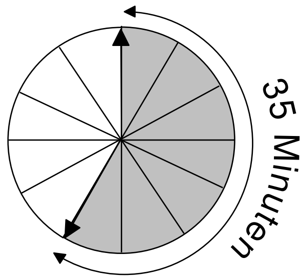


In einer Hausecke soll eine Terasse angelegt werden.
a) Berechne die Größe der gepflasterten Fläche.
b) Berechne die Kosten. es werden 128 • pro m² veranschlagt.
c) Ein Randstein ist 25 cm lang. Wie viele Randsteine müssen bestellt werden?

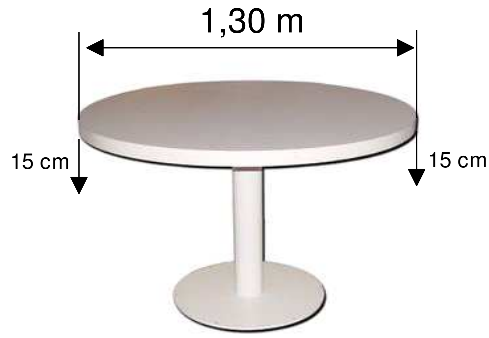
9) Ein Tischler soll einen runden Tisch für acht Personen anfertigen. Wie groß muss der Durchmesser sein, wenn pro Person 70 cm Bogenlänge (Platz) zur Verfügung stehen sollen?

1) Der große Zeiger einer Turmuhr ist 2,40 m lang.

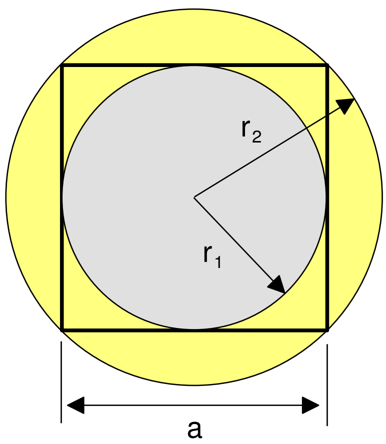
a) Welche Fläche überstreicht er in 35 Minuten?



b) Welchen Weg hat die Zeigerspitze in 50 Min. zurückgelegt?



2) Für einen kreisförmigen Tisch mit einem Durchmesser von 1,30 m soll eine Tischdecke genäht werden, die ringsherum 15 cm überhängt. Wie viel m² Stoff werden benötigt?



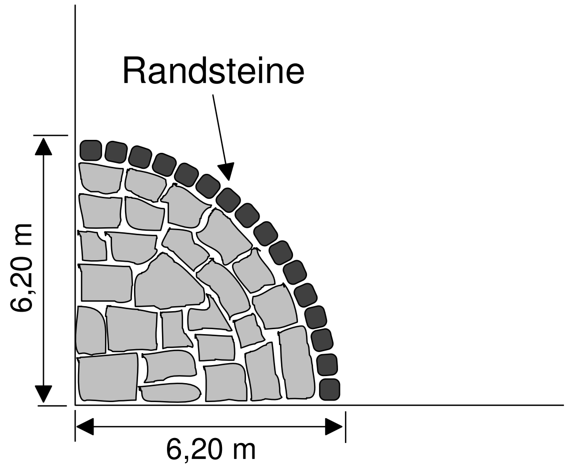
3) Wie groß ist die Fläche des Kreisringes, der durch das Quadrat mit der Kantenlänge a = 2 m festgelegt ist? (s. Skizze)

4) In einer Hausecke soll eine Terasse angelegt werden.

a) Berechne die Größe der gepflasterten Fläche.

b) Berechne die Kosten. Es werden 128 € pro m² veranschlagt.

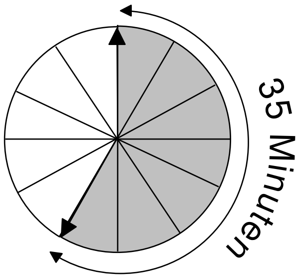
c) Ein Randstein ist 25 cm lang. Wie viele Randsteine müssen bestellt werden?



AG

1) Der große Zeiger einer Turmuhr ist 2,40 m lang.

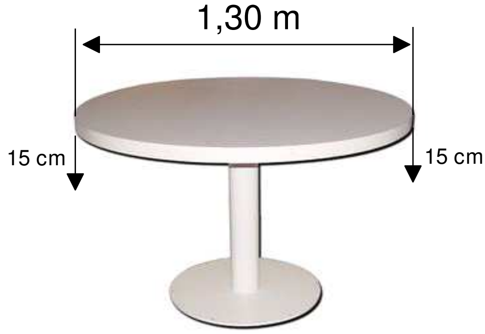
a) Welche Fläche überstreicht er in 35 Minuten?



$A = r^2 \pi \frac{35}{60} = 2{,}40^2 \pi \frac{35}{60} = \underline{10{,}55\ m^2}$

b) Welchen Weg hat die Zeigerspitze in 50 Min. zurückgelegt?

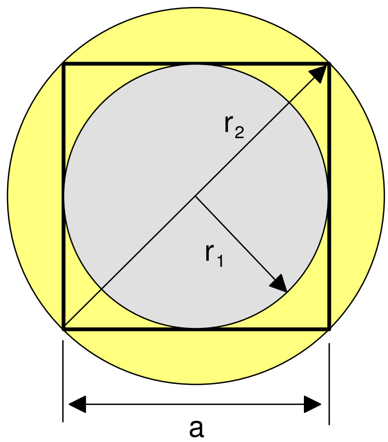
$Weg = d\pi \frac{50}{60} = 4{,}80\ \pi \frac{50}{60} = \underline{12{,}56\ m}$



2) Für einen kreisförmigen Tisch mit einem Durchmesser von 1,30 m soll eine Tischdecke genäht werden, die ringsherum 15 cm überhängt. Wie viel m² Stoff werden benötigt?

$r = 0{,}65\ m + 0{,}15\ m = 0{,}8\ m$

$A = r^2 \pi = 0{,}8^2 \pi = \underline{2{,}01\ m^2}$



3) Wie groß ist die Fläche des Kreisringes, der durch das Quadrat mit der Kantenlänge a = 2 m festgelegt ist? (s. Skizze)

$d_Q = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2{,}83\ m \Rightarrow r_2 = 1{,}415\ m$

$r_1 = 1\ m$

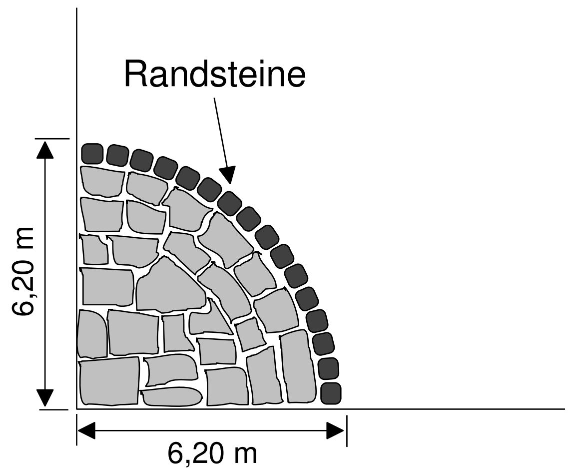
$A_{Ring} = 1{,}415^2 \pi - 1^2 \pi = \underline{3{,}145\ m^2}$

4) In einer Hausecke soll eine Terasse angelegt werden.

a) Berechne die Größe der gepflasterten Fläche.

b) Berechne die Kosten. Es werden 128 € pro m² veranschlagt.

c) Ein Randstein ist 25 cm lang. Wie viele Randsteine müssen bestellt werden?



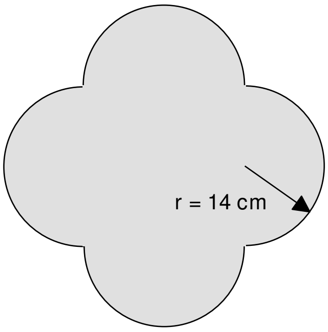
a) $A = (6{,}20^2 \pi) : 4 = \underline{30{,}18\ m^2}$

b) Kosten = $30{,}18 \cdot 128$ € = $\underline{3863{,}04}$ €

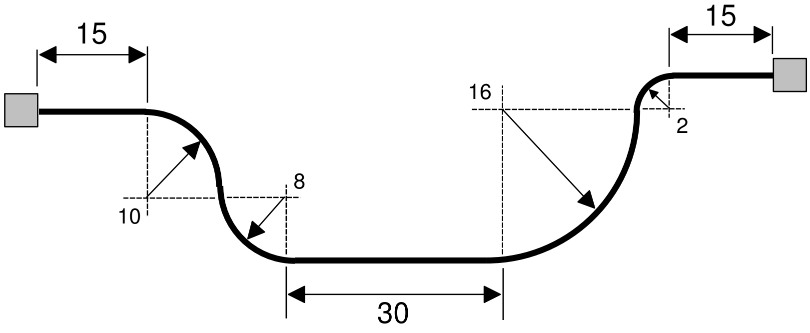
c) $b = (12{,}40\ m\ \pi) : 4 = 9{,}73\ m$; $9{,}73 : 0{,}25 = 38{,}9$ also ca. <u>39 Randsteine</u>

AG

1) Berechne die Gesamtfläche der abgebildeten Figur.

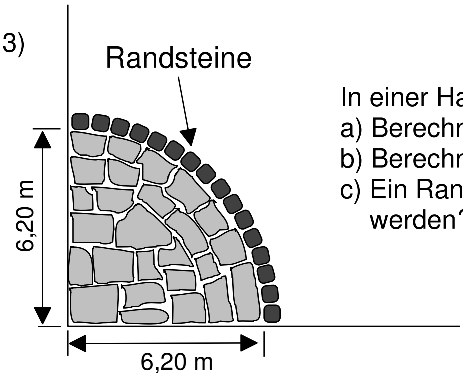


2)



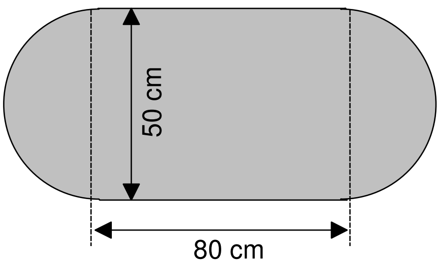
Wieviel Meter Rohr werden für die Rohrarbeiten gebraucht? (Maßangaben in der Skizze in m)

3)

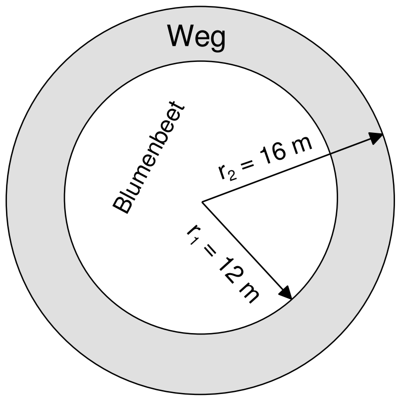


In einer Hausecke soll eine Terasse angelegt werden.
a) Berechne die Größe der gepflasterten Fläche.
b) Berechne die Kosten. Es werden 128 • pro m² veranschlagt.
c) Ein Randstein ist 25 cm lang. Wie viele Randsteine müssen bestellt werden?

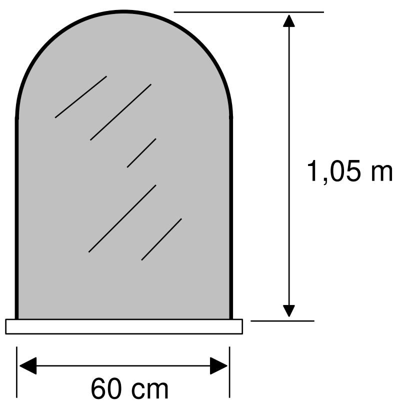
4) Berechne den Flächeninhalt und den Umfang der Figur.



5) Um ein kreisförmiges Blumenbeet wird ein Weg angelegt. Wie groß ist die Fläche des Weges?



6)



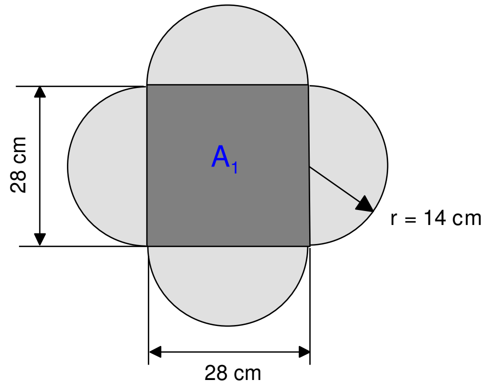
Ein Rundbogenfenster soll neu verglast werden.
a) Berechne die Fläche der Scheibe.
b) 1 m² Isolierglas kostet 58,50 € zuzüglich der Mehrwertsteuer von 19%. Wegen der außergewöhnlichen Form der Scheibe wird ein Aufschlag von 40% gerechnet. Wie teuer ist die Neuverglasung?

Kreisfläche: $A = r^2 \pi$

Kreisumfang: $U = 2\pi r$ oder $U = d\pi$

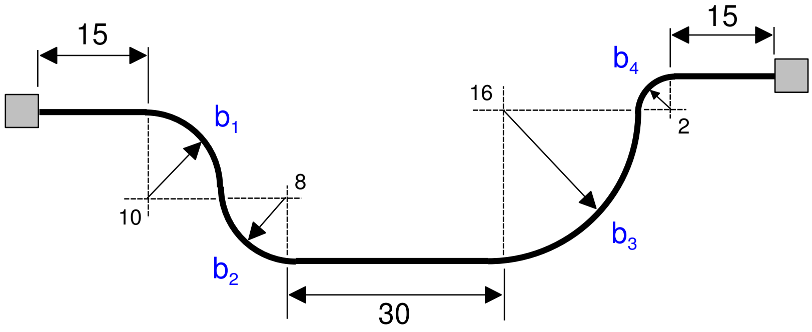
Lösungen / Bewertung

1) Berechne die Gesamtfläche der abgebildeten Figur.



$A_1 = 28^2 = 784\ cm^2$
$A_2 = 2 \cdot 14^2 \cdot \pi = 1230{,}88\ cm^2$
$A = 784 + 1230{,}88 = \underline{2014{,}88\ cm^2}$ 5 P

2)



Wieviel Meter Rohr werden für die Rohrarbeiten gebraucht? (Maßangaben in der Skizze in m)

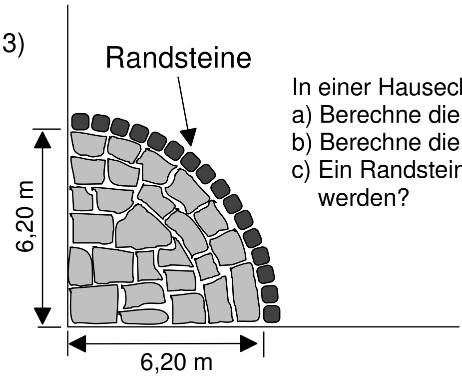
gerade Stücke = 15 + 30 + 15 = $\underline{60\ m}$ 2 P

$b_1 = \pi \cdot 20 : 4 = 15{,}7\ m$
$b_2 = \pi \cdot 16 : 4 = 12{,}56\ m$
$b_3 = \pi \cdot 32 : 4 = 25{,}12\ m$
$b_4 = \pi \cdot 4 : 4 = 3{,}14\ m$

gebogene Stücke = $\underline{56{,}52\ m}$ 4 P

gesamt = 60m + 56,52 m = $\underline{116{,}52\ m}$ 1 P

3)



In einer Hausecke soll eine Terasse angelegt werden.
a) Berechne die Größe der gepflasterten Fläche.
b) Berechne die Kosten. Es werden 128 • pro m² veranschlagt.
c) Ein Randstein ist 25 cm lang. Wie viele Randsteine müssen bestellt werden?

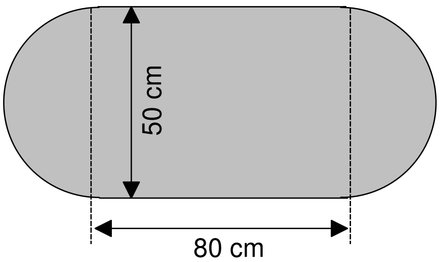
a) $A = (6{,}20^2 \pi) : 4 = \underline{30{,}18\ m^2}$ 2 P

b) 30,18 · 128 • = $\underline{3863{,}04}$ • 1 P

c) Kreisbogen = $(12{,}40 \cdot \pi) : 4 = 9{,}734\ m$

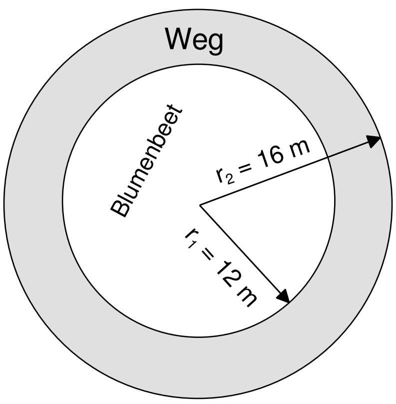
9,734 : 0,25 = 38,9 man benötigt also $\underline{39}$ Randsteine 3 P

4) Berechne den Flächeninhalt und den Umfang der Figur.



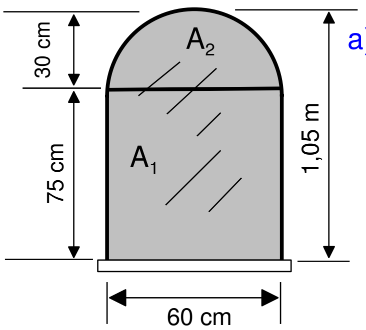
$A_1 = 50 \cdot 80 = 4000\ cm^2$ 1 P
$A_2 = 25^2 \pi = 1962{,}5\ cm^2$ 2 P
$A_g = 4000 + 1962{,}5 = \underline{5962{,}5\ cm^2}$ 1 P

5) Um ein kreisförmiges Blumenbeet wird ein Weg angelegt. Wie groß ist die Fläche des Weges?



$A_{Weg} = 16^2 \cdot \pi - 12^2 \cdot \pi = \underline{351{,}68\ m^2}$ 3 P

6) Ein Rundbogenfenster soll neu verglast werden.
a) Berechne die Fläche der Scheibe.
b) 1 m² Isolierglas kostet 58,50 € zuzüglich der Mehrwertsteuer von 19%. Wegen der außergewöhnlichen Form der Scheibe wird ein Aufschlag von 40% gerechnet. Wie teuer ist die Neuverglasung?



a) $A_1 = 60 \cdot 75 = 4500\ cm^2$ 1 P
$A_2 = (30^2 \pi) : 2 = 1413\ cm^2$ 2 P
$A = 4500 + 1413 = \underline{5913\ cm^2}$ 1 P

5913 cm² sind 0,5913 m²

b) 0,5913 · 58,50 € · 1,19 · 1,40 = $\underline{57{,}63\ €}$ 3 P

Gesamt: 32 P