

Zinsrechnung

Mit Hilfe der Zinsrechnung kann man berechnen, wie viel Zinsen man auf einen gegebenen Geldbetrag in einer bestimmten Zeit bei einem festgelegten Zinssatz bekommt. Zinsen sind eine Vergütung für geliehenes Geld und spielen in der Wirtschafts- und Finanzwelt eine wichtige Rolle.

1. Zinsrechnung bei Zeiträumen die kleiner oder gleich einem Jahr sind. (einfache Verzinsung)

Bei der einfachen Zinsrechnung geht man davon aus, dass Zinsen gemäß des Jahreszinssatzes einmal jährlich anfallen, aber nicht dem Kapital zugeschlagen werden.

Die Bedeutung der einfachen Zinsrechnung liegt somit vor allem bei Finanzgeschäften mit kurzen Laufzeiten wie kurzfristigen Geldanlagen von einigen Tagen, Wochen oder Monaten

K - das Kapital (in €)

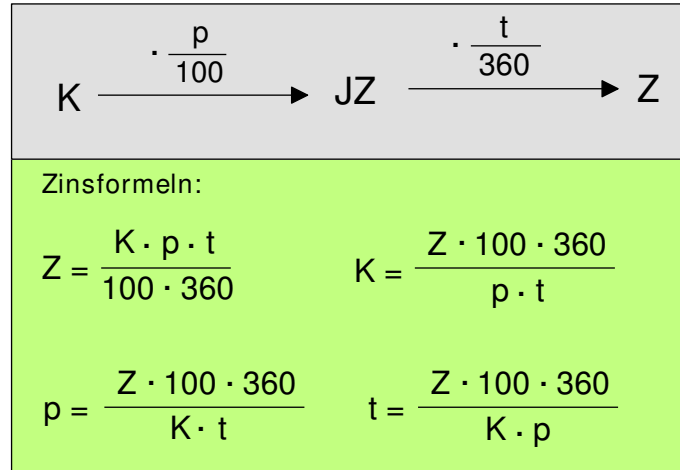
p - der Zinssatz (in %)

t - die Laufzeit (in Tagen)

Z - die Zinsen (in €)

JZ - Jahreszinsen (in €)

In der Zinsrechnung wird jeder Monat mit 30 Tagen und das Jahr mit 360 Tagen berechnet.



Beispiele: a) Wie viel Zinsen bringt ein Kapital von 1200 € bei einem Zinssatz von 2,8% in 140 Tagen?

$$K = 1200 \text{ €}$$

$$p = 2,8\%$$

$$t = 140 \text{ T}$$

$$Z = ? \text{ €}$$

$$Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360} = \frac{1200 \text{ €} \cdot 2,8\% \cdot 140 \text{ T}}{100\% \cdot 360 \text{ T}} = \underline{13,07 \text{ €}}$$

b) Wie groß muss ein Kapital sein, wenn es bei einem Zinssatz von 3,2% in einem Monat 80 € Zinsen bringen soll?

$$p = 3,2\%$$

$$t = 1 \text{ Mon} = 30 \text{ T}$$

$$Z = 80 \text{ €}$$

$$K = ? \text{ €}$$

$$K = \frac{Z \cdot 100 \cdot 360}{p \cdot t} = \frac{80 \text{ €} \cdot 100\% \cdot 360 \text{ T}}{3,2\% \cdot 30 \text{ T}} = \underline{30000 \text{ €}}$$

c) Wie hoch muss der Zinssatz sein, wenn ein Kapital von 2500 € in 3 Monaten 18 € Zinsen bringen soll?

$$K = 2500 \text{ €}$$

$$t = 3 \text{ Mon} = 90 \text{ T}$$

$$Z = 18 \text{ €}$$

$$p = ? \%$$

$$p = \frac{Z \cdot 100 \cdot 360}{K \cdot t} = \frac{18 \text{ €} \cdot 100\% \cdot 360 \text{ T}}{2500 \text{ €} \cdot 90 \text{ T}} = \underline{2,88 \%$$

d) In welcher Zeit brächte ein Kapital von 20000 € bei einem Zinssatz von 2,8% 400 € Zinsen?

$$K = 20000 \text{ €}$$

$$p = 2,8\%$$

$$Z = 400 \text{ €}$$

$$t = ? \text{ T}$$

$$t = \frac{Z \cdot 100 \cdot 360}{K \cdot p} = \frac{400 \text{ €} \cdot 100\% \cdot 360 \text{ T}}{20000 \text{ €} \cdot 2,8\%} = \underline{257 \text{ T}}$$

Berechnung der Tage, wenn ein Zeitraum durch zwei Datumsangaben gegeben ist.

Der Tag an dem das Kapital eingezahlt wird, wird bei einem Guthaben nicht mit berechnet. Bei einem Darlehen wird der Tag der Kreditaufnahme mit berücksichtigt.

Beispiele:	Zeitraum	Guthaben	Darlehen
vom 12. 01. bis zum 23. 05.	18 T + 3 Mon + 23 T = 131 T	130 T	132 T
vom 30.04. bis zum 12.12.	7 Mon + 12 T = 222 T	221 T	223 T
vom 03.02. bis zum Jahresende	27 T + 10 Mon = 327 T	326 T	328 T
vom 24.05. bis zum 01.09.	6 T + 3 Mon + 1 T = 97 T	96 T	98 T

2. Zinsrechnung bei Zeiträumen die größer als Jahr sind und bei der ab der folgenden Periode die angefallenen Zinsen dem Guthaben zugeschlagen werden. (Zinseszinsrechnung)

Beispiel: Auf welche Summe wächst ein Kapital von 5000 € in 3 Jahren bei einer Verzinsung von 3,2 % an?

$$5000 \text{ €} \xrightarrow{\cdot 1,032} 5160 \text{ €} \xrightarrow{\cdot 1,032} 5325,12 \text{ €} \xrightarrow{\cdot 1,032} 5495,52 \text{ €}$$

nach 1 Jahr nach 2 Jahren nach 3 Jahren

1,032 ist der Prozentfaktor. Er berechnet sich nach $\frac{100 + 3,2}{100}$ oder $\frac{100}{100} + \frac{3,2}{100} = 1 + \frac{3,2}{100}$

Dadurch ergibt sich die Zinseszinsformel: $K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

K_n = Kapital nach n Jahren
 K_0 = Anfangskapital
 p = Zinssatz
 n = Zahl der (ganzen) Jahre

Beispiele: a) Wie hoch ist ein Kapital von 2200 € nach 5 Jahren bei einem Zinssatz von 2,2 %?

$$\begin{array}{l}
 K_0 = 2200 \text{ €} \\
 n = 5 \text{ Jahre} \\
 p = 2,2\% \\
 K_5 = ? \text{ €}
 \end{array}
 \quad
 K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = 2200 \text{ €} \cdot \left(1 + \frac{2,2}{100}\right)^5 = \underline{2452,88 \text{ €}}$$

b) Wie hoch muss ein Kapital sein, wenn es nach 10 Jahren bei einer Verzinsung von 2,5% auf 20000 € anwachsen soll?

$$\begin{array}{l}
 K_{10} = 20000 \text{ €} \\
 p = 2,5\% \\
 n = 10 \text{ Jahre} \\
 K_0 = ? \text{ €}
 \end{array}
 \quad
 \text{aus } K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \text{ folgt } K_0 = \frac{K_n}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n} =$$

$$\frac{20000 \text{ €}}{\left(1 + \frac{2,5}{100}\right)^{10}} = \underline{15623,97 \text{ €}}$$

c) Wie hoch muss der Zinssatz sein, wenn ein Kapital von 280 € in 8 Jahren auf 380 € anwachsen soll?

$$\begin{array}{l}
 K_0 = 280 \text{ €} \\
 K_8 = 380 \text{ €} \\
 n = 8 \text{ Jahre} \\
 p = ? \%
 \end{array}
 \quad
 \text{aus } K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \text{ folgt } \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = \frac{K_n}{K_0} \quad \left| \sqrt[n]{\quad}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{p}{100} = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \Rightarrow \frac{p}{100} = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 \quad \left| \cdot 100$$

$$p = 100 \cdot \left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1\right) = 100 \cdot \left(\sqrt[8]{\frac{380 \text{ €}}{280 \text{ €}}} - 1\right) = \underline{3,89\%}$$

EXTRA

d) In wie vielen Jahren wächst ein Kapital von 500 € bei einem Zinssatz von 4% auf 632,66 € an?

$$\begin{array}{l}
 K_0 = 500 \text{ €} \\
 K_n = 632,66 \text{ €} \\
 p = 4\% \\
 n = ? \text{ Jahre}
 \end{array}
 \quad
 \text{aus } K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \text{ folgt } \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = \frac{K_n}{K_0} \quad \text{logarithmieren...}$$

$$n \log \left(1 + \frac{p}{100}\right) = \log K_n - \log K_0 \Rightarrow n = \frac{\log K_n - \log K_0}{\log \left(1 + \frac{p}{100}\right)}$$

$$n = \frac{\log 632,66 - \log 500}{\log \left(1 + \frac{4}{100}\right)} = \underline{6 \text{ Jahre}}$$

d) Auf wieviel € wächst ein Guthaben von 350 € bei einer Verzinsung von 3,2% vom 15.11.2009 bis zum 26.04.2015 an?

- zuerst berechnet man die Zinsen bis zum Jahresende: $K = 350 \text{ €}$; $p = 3,2\%$; $t = 1 \text{ Mon} + 15 \text{ T} = 35 \text{ T}$

$$350 \text{ €} \xrightarrow{\cdot \frac{3,2}{100}} \xrightarrow{\cdot \frac{35}{360}} \underline{1,09 \text{ €}}$$

Die Zinsen werden dem Kapital am Ende des Jahres zugeschlagen:
 $350 \text{ €} + 1,09 \text{ €} = \underline{351,09 \text{ €}}$

- Nun wird das Kapital für 5 ganze Jahre verzinst: $K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = 351,09 \cdot \left(1 + \frac{3,2}{100}\right)^5 = \underline{410,98 \text{ €}}$

- 410,98 € ist das Kapital am Jahresanfang des letzten Zinsjahres:

$$K = 410,98 \text{ €}$$

$$p = 3,2\%$$

$$t = 3 \text{ Mon} + 4 \text{ T} - 1 \text{ T} = 93 \text{ T}$$

$$410,98 \text{ €} \xrightarrow{\cdot \frac{3,2}{100}} \xrightarrow{\cdot \frac{93}{360}} \underline{3,40 \text{ €}}$$

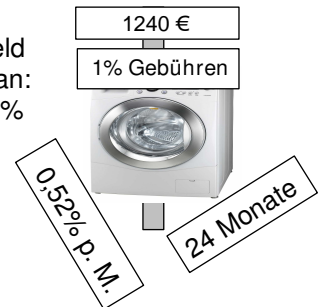
Also beträgt das Endguthaben am 26.04.2015 : $410,98 \text{ €} + 3,40 \text{ €} = \underline{414,38 \text{ €}}$

Ratenkredite

Der Ratenkredit ist ein Darlehen über einen Betrag in Geld an Privatpersonen, der in gleichbleibenden monatlichen Beträgen (Raten) zurückgezahlt wird.

Beispiel: Frau N. braucht eine neue Waschmaschine. Da sie im Moment nicht so viel Geld hat, kauft sie die Waschmaschine auf Raten. Das Geschäft bietet ihr folgendes an: Die Kaufsumme von 1240 € kann sie in 24 Monatsraten abzahlen. Es werden 1% Bearbeitungsgebühr verlangt. Der Zinssatz beträgt 0,52% pro Monat.

- Wie hoch wird der gesamte Rückzahlungsbetrag sein?
- Wie hoch sind die Zinsen?
- Wie viel muss Frau N. monatlich zurückzahlen?
- Wie hoch ist der eff. Jahreszins?



a) Zunächst werden die Gebühren berechnet: $1240 \text{ €} \xrightarrow{\cdot 0,01} \underline{12,40 \text{ €}}$

Berechnung der Zinsen: $0,52\% \cdot 24 = 12,48\%$ $1240 \text{ €} \xrightarrow{\cdot 0,1248} \underline{154,75 \text{ €}}$

Der gesamte Rückzahlungsbetrag beträgt also: $1240 \text{ €} + 12,40 \text{ €} + 154,75 \text{ €} = \underline{1407,15 \text{ €}}$

b) Die Zinsen betragen 154,75 €

c) $1407,15 \text{ €} : 24 = 58,63125$ Üblicherweise rundet man die Beträge so, dass schließlich die Gesamtraten genau dem Rückzahlungsbetrag entsprechen.

$$23 \cdot 57 \text{ €} = 1311 \text{ €} ; 1407,15 - 1311 = 96,15 \text{ €}$$

also beträgt die 1. Rate 96,15 €, es folgen dann 23 Raten zu je 57,00 €.

d)
$$\text{eff. Z} = \frac{(\text{Zinsen} + \text{Gebühr}) \cdot \text{Laufzeit}}{(\text{Laufzeit} + 1) \cdot \text{Kreditsumme}} \cdot 100\% = \frac{(154,75 + 12,40) \cdot 24}{25 \cdot 1240} \cdot 100\% = \underline{12,94 \text{ \%}}$$

Beispiel: Vergleiche die Angebote!

Bargeld zum Mitnehmen
5000 €
Rückzahlung 6 Monate
Zinssatz: 9,25%
Keine Bearbeitungsgebühr!

$$\text{Zinsen} = 5000\text{€} \cdot 0,0925 \cdot 0,5 \\ = \underline{231,25 \text{ €}}$$

Sofort Bargeld
5000 €
Rückzahlung: $\frac{1}{2}$ Jahr
Zinssatz: 8,75%
20 € Bearbeitungsgebühr

$$\text{Zinsen} = 5000 \text{ €} \cdot 0,0875 \cdot 0,5 \\ = 218,75 \text{ €} \\ 218,75 \text{ €} + 20 \text{ €} = \underline{238,75 \text{ €}}$$

Schnell-Kredit
5000 €
Laufzeit 6 Monate
6 Raten zu je 875 €
Keine Bearbeitungsgebühr!

$$\text{Zinsen} = 6 \cdot 875 \text{ €} - 5000 \text{ €} \\ = \underline{250 \text{ €}}$$

Beispiel: Auf Peters Sparbuch sind am 15.03. 486 €. Am 27.08. zahlt er 280 € ein und am 07.10. hebt er 150 € ab. Wie hoch ist der Kontostand am Jahresende bei einer Verzinsung von 2,8 %?

Datum	Einzahlung	Auszahlung	Zinstage	Zinsen	Kontostand
01.01.					
15.03.					486 €
27.08.	280 €		237 T	8,96 € ¹⁾	766 €
07.10.		150 €	39 T	2,38 € ²⁾	616 €
31.12.				3,98 € ³⁾	631,32 €

1) vom 01.01. bis zum 27.08. sind: 210 T + 27 T = 237 T

$$\text{Zinsen} = 486 \text{ €} \cdot 0,028 \cdot \frac{237}{360} = 8,96 \text{ €}$$

2) vom 27.08. bis zum 07.10. sind: 3 + 30 + 7 = 40 T

$$\text{Zinsen} = 766 \text{ €} \cdot 0,028 \cdot \frac{40}{360} = 2,38 \text{ €}$$

3) vom 07.10. bis zum Jahresende sind: 23 T + 60 T = 83 T

$$\text{Zinsen} = 616 \text{ €} \cdot 0,028 \cdot \frac{83}{360} = 3,98 \text{ €}$$