Lineare Funktionen

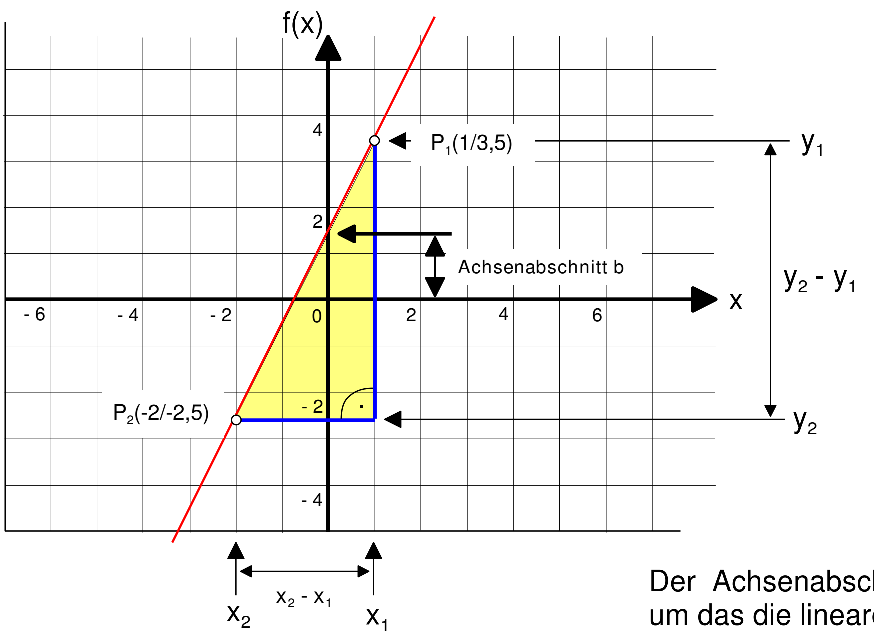
Eine Funktion ist eine Zuordnung. Durch eine festgelegte Regel wird einer Zahl eine andere zugeordnet.

Mit einer solchen Funktionsgleichung kann nun berechnet werden, welche Zahlen einander zugeordnet werden.

Bsp.: $f(x) = 2x + 1{,}5$

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	- 2,5	- 0,5	1,5	3,5	5,5	7,5

Der Funktionsgraph sieht so aus:

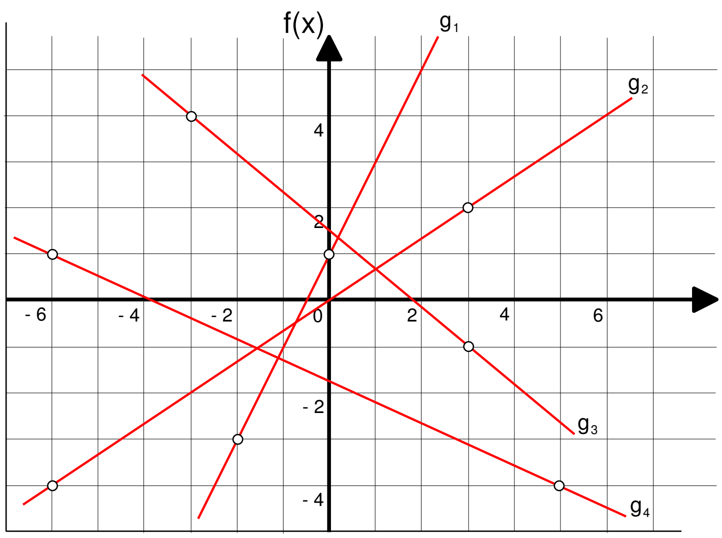


In der nebenstehenden Grafik ist eine Ursprungsgerade, durch die Punkte P_1 und P_2 abgebildet. Die Steigung der Geraden soll mit Hilfe der Koordinaten von P_1 und P_2 ermittelt werden.
Die Längen von Gegenkathete und Ankathete sind durch die Koordinatendifferenzen der beiden Punkte festgelegt. Die Steigung der linearen Funktion ist nun der Quotient aus Gegenkathete und Ankathete des Steigungsdreiecks.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{-2{,}5 - 3{,}5}{-2 - 1} = \frac{-6}{-3} = 2$$

Der Achsenabschnitt b ist das Stück auf der y-Achse, um das die lineare Funktion nach oben oder nach unten verschoben ist. Insofern ist die allgemeine Form der linearen Funktion: $\underline{f(x) = mx + b}$



In der linken Abbildung sind vier lin. Funktionen eingezeichnet (g_1 - g_4). Die mit einem Kreis gekennzeichneten Punkte liegen genau auf den jeweiligen Geraden. Es sollen a) die Steigungen, b) die Achsenabschnitte und c) die Funktionsgleichungen bestimmt werden.

a) g_1: $m = \frac{1 - -3}{0 - -2} = \frac{4}{2} = 2$

g_2: $m = \frac{2 - -4}{3 - -6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

g_3: $m = \frac{4 - -1}{-3 - 3} = \frac{5}{-6} = -\frac{5}{6}$

g_4: $m = \frac{1 - -4}{-6 - 5} = \frac{5}{-11} =$

b) g_1: aus $f(x) = mx + b \Rightarrow 1 = 2 \cdot 0 + b \Rightarrow \underline{b = 1}$

g_2: aus $f(x) = mx + b \Rightarrow 2 = \frac{2}{3} \cdot 3 + b \Rightarrow \underline{b = 0}$

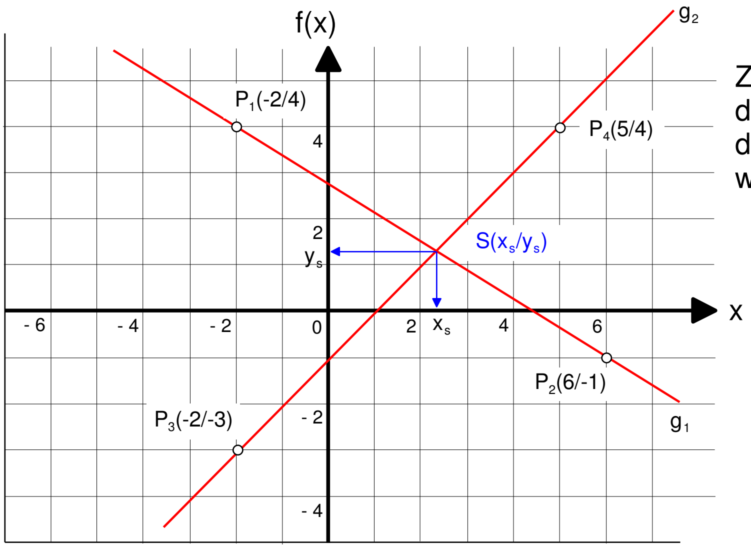
g_3: aus $f(x) = mx + b \Rightarrow -1 = -\frac{5}{6} \cdot 3 + b \Rightarrow -1 = -2{,}5 + b$; $\underline{b = 1{,}5}$

g_4: aus $f(x) = mx + b \Rightarrow -4 = -\frac{5}{11} \cdot 5 + b \Rightarrow b = -4 + \frac{25}{11} = \underline{-1\frac{8}{11}}$

c) g_1: $f(x) = 2x + 1$; g_2: $f(x) = \frac{2}{3}x$; g_3: $f(x) = -\frac{5}{6}x + 1{,}5$

g_4: $f(x) = -\frac{5}{11}x - 1\frac{8}{11}$

Schnittpunkt zweier linearer Funktionen



Zwei Geraden sind durch die in der Zeichnung dargestellten Punkte P_1 - P_4 festgelegt. Es sollen die Koordinaten des Schnittpunktes bestimmt werden.

Zunächst werden die Steigungen der beiden Geraden ermittelt:

$$g_1:\ m_1 = \frac{4 - -1}{-2 - 6} = \frac{5}{-8} = -0{,}625$$

$$g_2:\ m_2 = \frac{4 - -3}{5 - -2} = \frac{7}{7} = 1$$

Nun werden die Achsenabschnitte b_1 und b_2 berechnet:
Allgem. gilt: $y = mx + b$ => für g_1: $-1 = -0{,}625 \cdot 6 + b_1$

g_1: $-1 = -3{,}75 + b_1 \quad | + 3{,}75$

$b_1 = 2{,}75$

für g_2: $4 = 5 + b$ => $b = -1$

Somit lautet die erste lin. Fünktions-gleichung:

$y = -0{,}625x + 2{,}75$

Die zweite Funktionsgleichung lautet:

$y = x - 1$

Da beide linearen Funktionen im Schnittpunkt S die gleichen y-Koordinaten besitzen, können die Gleichungssysteme gleich gesetzt werden:

$-0{,}625x + 2{,}75 = x - 1 \quad | -x - 2{,}75$

$-1{,}625x = -3{,}75 \quad | : (-1{,}625)$

$x = 2{,}308$

Um den y-Wert zu ermitteln, wird der gefundene x-Wert in eine der Gleichungen eingesetzt:
$y = x - 1 = 2{,}308 - 1 = 1{,}308$
Somit hat der Schnittpunkt der beiden linearen Funktionen die Koordinaten: $S(2{,}308/1{,}308)$

Lösen von linearen Gleichungssystemen nach dem Additionsverfahren

a)
$$\begin{array}{rl} 4x - 3y = 5 & | \\ y = -3x + 7 & | + 3x \\ \hline 4x - 3y = 5 & | \\ 3x + y = 7 & | \cdot 3 \\ \hline 4x - 3y = 5 & \\ + [9x + 3y = 21] & \\ \hline 13x = 26 & | : 13 \\ x = 2 & \end{array}$$

$y = -3 \cdot 2 + 7 = 1$

$\mathbb{L} = \{ 2 ; 1 \}$

b)
$$\begin{array}{rl} 6x + 3y = 6 & | \cdot 4 \\ 8x - 7y = -3 & | \cdot 3 \\ \hline 24x + 12y = 24 & \\ -[24x - 21y = -9] & \\ \hline 33y = 33 & \\ y = 1 & \\ 6x + 3 = 6 & | -3 \\ 6x = 3 & | : 6 \\ x = 0{,}5 & \end{array}$$

$\mathbb{L} = \{ 0{,}5 ; 1 \}$

c)
$$\begin{array}{rl} -5x + 7y = 101 & | \cdot 4 \\ 4x + 3y = -12 & | \cdot 5 \\ \hline -20x + 28y = 404 & \\ + [\ 20x + 15y = -60] & \\ \hline 43y = 344 & | : 43 \\ y = 8 & \\ 4x + 24 = -12 & | -24 \\ 4x = -36 & | : 4 \\ x = -9 & \end{array}$$

$\mathbb{L} = \{ -9 ; 8 \}$

Lösen von linearen Gleichungssystemen nach dem Gleichsetzverfahren

a) $4x - 3y = 5 \quad | -4x$
$y = -3x + 7$

$-3y = -4x + 5 \quad | :(-3)$
$y = -3x + 7$

$y = \frac{-4x + 5}{-3}$

$y = -3x + 7$

$\frac{-4x + 5}{-3} = -3x + 7 \quad | \cdot(-3)$

$-4x + 5 = 9x - 21 \quad | -9x - 5$

$-13x = -26 \quad | :(-13)$

$x = 2$

$y = -3 \cdot 2 + 7 = 1$

$\mathbb{L} = \{ 2 ; 1 \}$

b) $6x + 3y = 6 \quad | -3y$
$8x - 7y = -3 \quad | +7y$

$6x = 6 - 3y \quad | :6$
$8x = -3 + 7y \quad | :8$

$x = \frac{6 - 3y}{6}$

$x = \frac{-3 + 7y}{8}$

$\frac{6 - 3y}{6} = \frac{-3 + 7y}{8} \quad | \cdot 24$

$\frac{\cancel{24}^{4}(6 - 3y)}{\cancel{6}} = \frac{\cancel{24}^{3}(-3 + 7y)}{\cancel{8}}$

$24 - 12y = -9 + 21y \quad | -21y - 24$

$-33y = -33$

$y = 1$

$x = \frac{6 - 3}{6} = 0{,}5$

$\mathbb{L} = \{ 0{,}5 ; 1 \}$

c) $-5x + 7y = 101 \quad | +5x$
$4x + 3y = -12 \quad | -4x$

$7y = 101 + 5x \quad | :7$
$3y = -12 - 4x \quad | :3$

$y = \frac{101 + 5x}{7}$

$y = \frac{-12 - 4x}{3}$

$\frac{101 + 5x}{7} = \frac{-12 - 4x}{3} \quad | \cdot 21$

$\frac{\cancel{21}^{3}(101 + 5x)}{\cancel{7}} = \frac{\cancel{21}^{7}(-12 - 4x)}{\cancel{3}}$

$303 + 15x = -84 - 28x \quad | +28x - 303$

$43x = -387 \quad | :43$

$x = -9$

$y = \frac{101 - 45}{7} = 8$

$\mathbb{L} = \{ -9 ; 8 \}$

Lösen von linearen Gleichungssystemen nach dem Einsetzverfahren

a) $4x - 3y = 5 \quad (1)$
$y = -3x + 7 \quad (2)$

Gleichung 2 wird in Gleichung 1 eingesetzt!

$4x - 3(-3x + 7) = 5$

$4x + 9x - 21 = 5 \quad | +21$

$13x = 26 \quad | :13$

$x = 2$

$y = -3 \cdot 2 + 7 = 1$

$\mathbb{L} = \{ 2 ; 1 \}$

b) $6x + 3y = 6 \quad (1)$
$8x - 7y = -3 \quad (2)$

aus Gleichung 1 folgt: $y = \frac{6 - 6x}{3}$

$y = \frac{\cancel{3}(2 - 2x)}{\cancel{3}}$

$y = 2 - 2x$

einsetzen in Gleichung 2:

$8x - 7(2 - 2x) = -3$

$8x - 14 + 14x = -3 \quad | +14$

$22x = 11 \quad | :22$

$x = 0{,}5$

$y = 2 - 1 = 1$

$\mathbb{L} = \{ 0{,}5 ; 1 \}$

c) $-5x + 7y = 101 \quad (1)$
$4x + 3y = -12 \quad (2)$

aus Gleichung 2 folgt:

$x = \frac{-12 - 3y}{4}$

einsetzen in Gleichung 1:

$\frac{-5(-12 - 3y)}{4} + 7y = 101$

$\frac{60 + 15y}{4} + 7y = 101 \quad | \cdot 4$

$60 + 15y + 28y = 404 \quad | -60$

$43y = 344 \quad | :43$

$y = 8$

$x = \frac{-12 - 24}{4}$

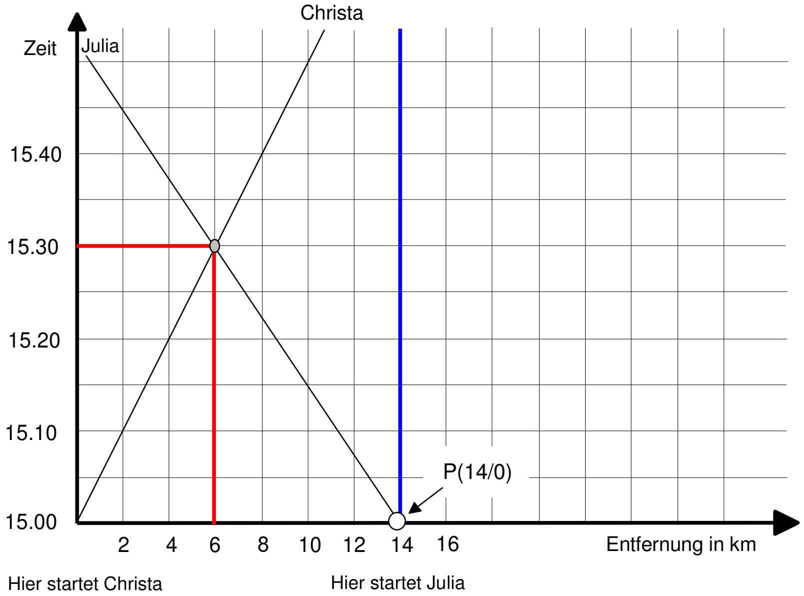
$x = -9$

$\mathbb{L} = \{ -9 ; 8 \}$

Bewegungsaufgaben

Christa und Julia haben sich verabredet. Sie starten beide um 15 Uhr mit ihren Fahrrädern in ihren 14 km voneinander entfernten Heimatorten. Christa schafft in jeder Stunde 12, Julia 16 km. Wie weit von Christas Heimatort entfernt treffen sie sich?

Zeichnerische Lösung:



Nach der zeichnerischen Lösung treffen sie sich um 15.30 Uhr. Christa ist dann 6 km und Julia ist 8 km gefahren.

Rechnerische Lösung:

Christa: $m = \frac{1}{12}$ $\quad b = 0 \quad \Rightarrow y = \frac{1}{12}x$

Julia: $m = -\frac{1}{16}$ $\quad$ Es gilt: $y = mx + b$ also

$$0 = -\frac{1}{16} \cdot 14 + b \Rightarrow b = \frac{7}{8}$$

$$y = -\frac{1}{16}x + \frac{7}{8}$$

$$\frac{1}{12}x = -\frac{1}{16}x + \frac{7}{8} \quad \Big| \cdot 192$$

$$16x = -12x + 168 \quad \Big| +12x$$

$$28x = 168 \quad \Big| :28$$

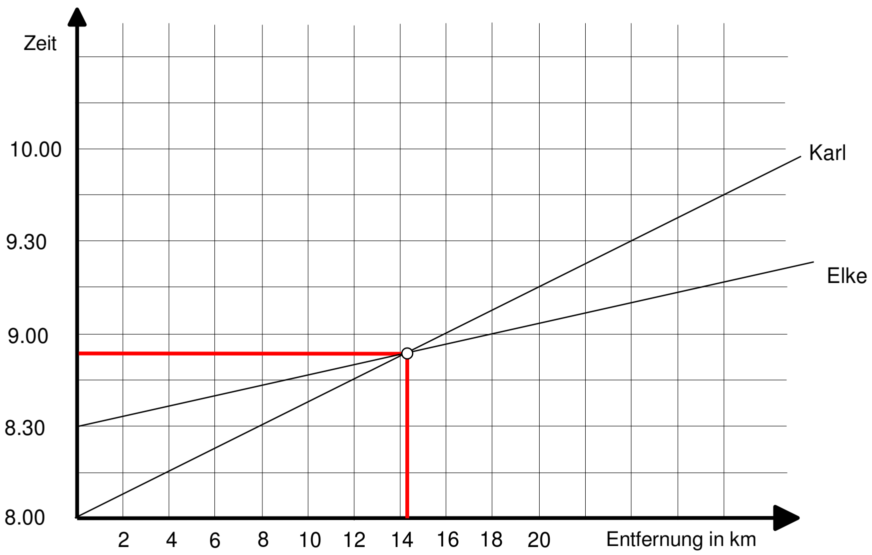
$$x = 6$$

$$y = 0{,}5\text{ h}$$

Sie treffen sich nachdemChrista 6 km und Julia 8 km gefahren sind nach einer fahrzeit von 0,5 h, d. h. um 15.30 Uhr.

Karl fährt um 8.00 Uhr mit dem Fahrrad los. Er erreicht eine durchschnittliche Geschwindigkeit von 16 km/h. Um 8.30 folgt ihm Elke auf ihrem Moped, mit dem sie 36 km/h im Schnitt zurücklegt.
Wann hat Elke Karl eingeholt?

Zeichnerische Lösung:



Nach der zeichnerischen Lösung holt Elke Karl gegen 8.47 Uhr ein. Beide haben dann ca. 14,4 km zurückgelegt.

Rechnerische Lösung:

Karl: $m = \frac{1}{16}$ $\quad b = 0 \quad y = \frac{1}{16}x$

Elke: $m = \frac{1}{36}$ $\quad b = 0{,}5 \quad y = \frac{1}{36}x + 0{,}5$

$$\frac{1}{16}x = \frac{1}{36}x + 0{,}5 \quad \Big| \cdot 36$$

$$2{,}25x = x + 18$$

$$1{,}25x = 18$$

$$x = 14{,}4$$

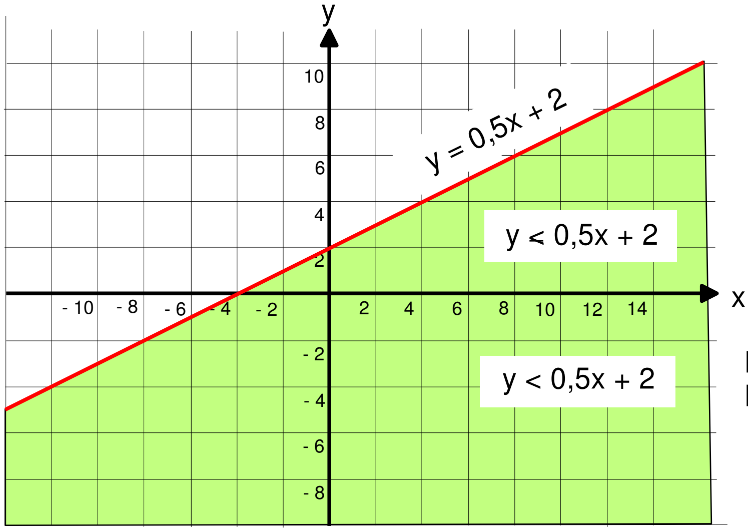
$$y = \frac{1}{16} \cdot 14{,}4 = 0{,}9$$

$$0{,}9\text{ h} = 54\text{ Min}$$

Elke holt Karl um 8.54 Uhr ein. Dann sind beide 14,4 km gefahren.

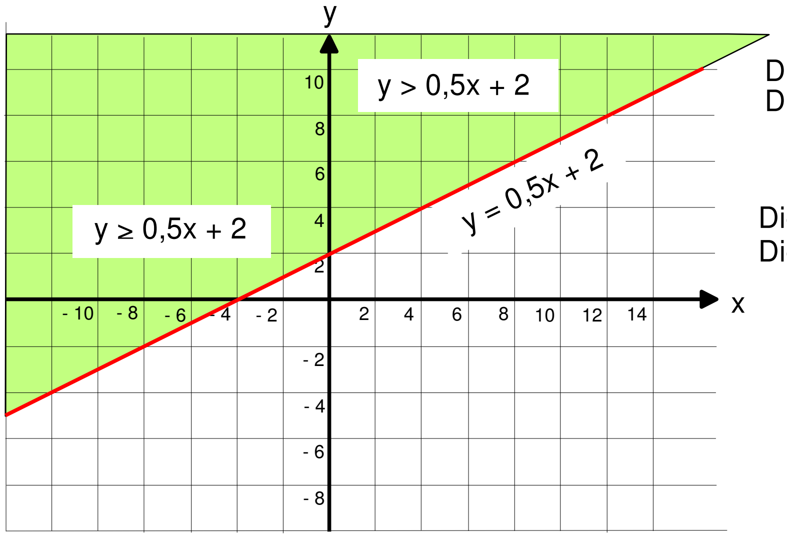
Lineare Ungleichungen und Ungleichungssysteme

Sind Terme durch <, > oder durch ≤ bzw. ≥ verbunden, so liegt eine Ungleichung vor!



Die Lösungsmenge liegt unterhalb der Geraden.
Die Gerade gehört zur Lösungsmenge.

Die Lösungsmenge liegt unterhalb der Geraden.
Die Gerade gehört nicht zur Lösungsmenge.



Die Lösungsmenge liegt oberhalb der Geraden.
Die Gerade gehört nicht zur Lösungsmenge.

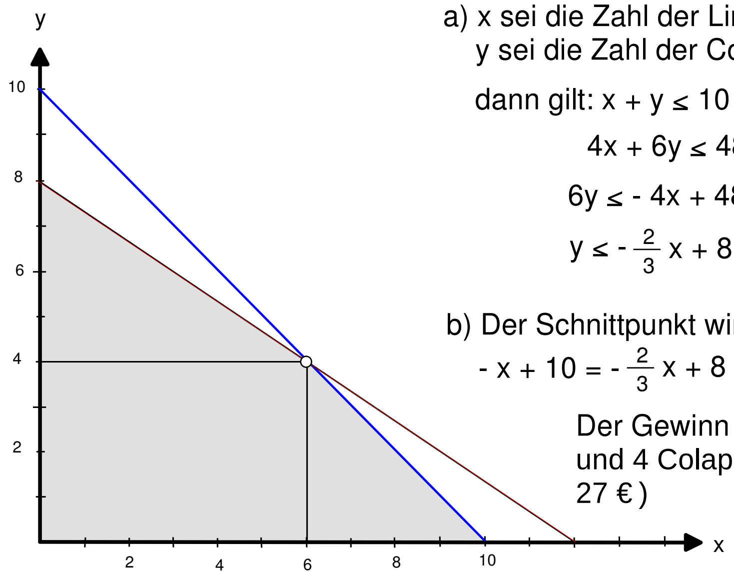
Die Lösungsmenge liegt oberhalb der Geraden.
Die Gerade gehört zur Lösungsmenge.

Beispiel

Für eine Klassenfahrt sollen höchstens 10 Packungen Limonade und Cola gekauft werden. Eine Packung Limonade kostet 4 € und eine Packung Cola kostet 6 €. Zum Kauf stehen höchstens 48 € zur Verfügung. Beim Verkauf wird pro Packung Limonade 2,50 € Gewinn und pro Packung Cola 3 € Gewinn gemacht. Wie viele Packungen von jeder Sorte müssen eingekauft werden, damit der Gewinn am größten ist?

a) Gib das Ungleichungssystem an und zeichne ein Planungsvieleck.

b) Ermittle den Punkt des Planungsvielecks für den größten Gewinn.



a) x sei die Zahl der Limonadenpackungen
y sei die Zahl der Colapackungen

dann gilt: $x + y \leq 10 \quad \Rightarrow y \leq -x + 10$ (blaue Gerade)

$$4x + 6y \leq 48 \quad | -4x$$

$$6y \leq -4x + 48 \quad | :6$$

$$y \leq -\frac{2}{3}x + 8$$ (rote Gerade)

b) Der Schnittpunkt wird ermittelt

$$-x + 10 = -\frac{2}{3}x + 8 \quad \Rightarrow x = 6 \text{ und } y = 4$$

Der Gewinn ist also am größten, wenn 6 Limonadenpackungen und 4 Colapackungen verkauft werden ($6 \cdot 2{,}50\,€ + 4 \cdot 3\,€ = 27\,€$)