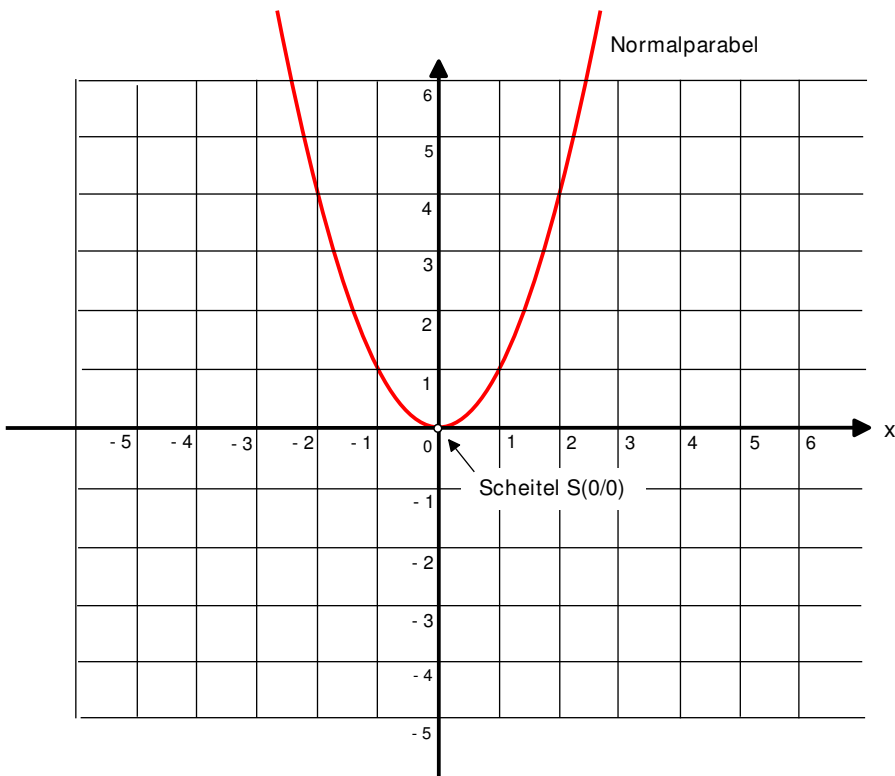


Quadratische Funktionen

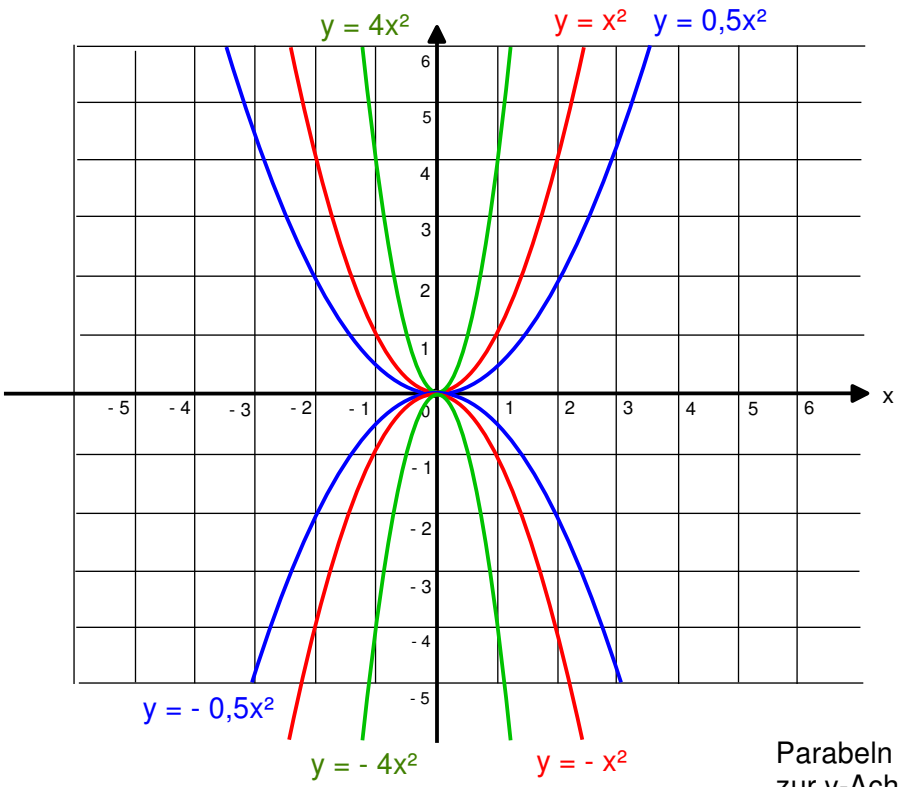
Die Funktionsgleichung $y = x^2$ beschreibt die einfachste Form einer quadratischen Funktion. Das Schaubild, das zu dieser Funktionsgleichung gehört, heißt Normalparabel. Der Punkt $S(0/0)$ wird **Scheitel S** genannt. Die Normalparabel ist **symmetrisch zur y-Achse und nach oben geöffnet**.

Wertetabelle zur Funktion $y = x^2$

| | | | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|---|---|---|---|----|
| x | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | 16 | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 |



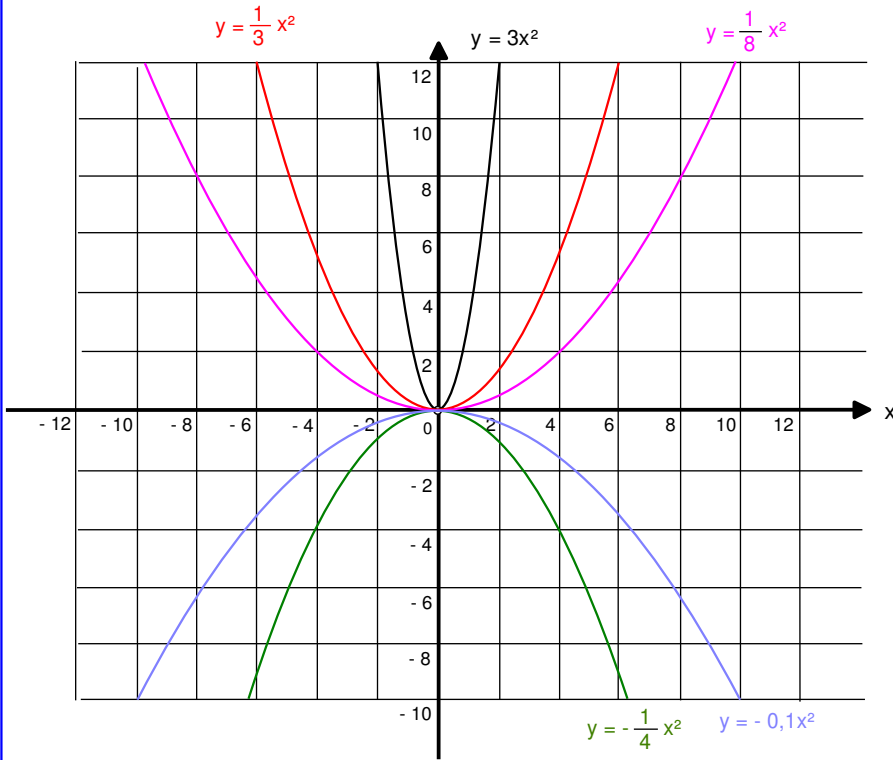
Parabeln der Form $y = ax^2$



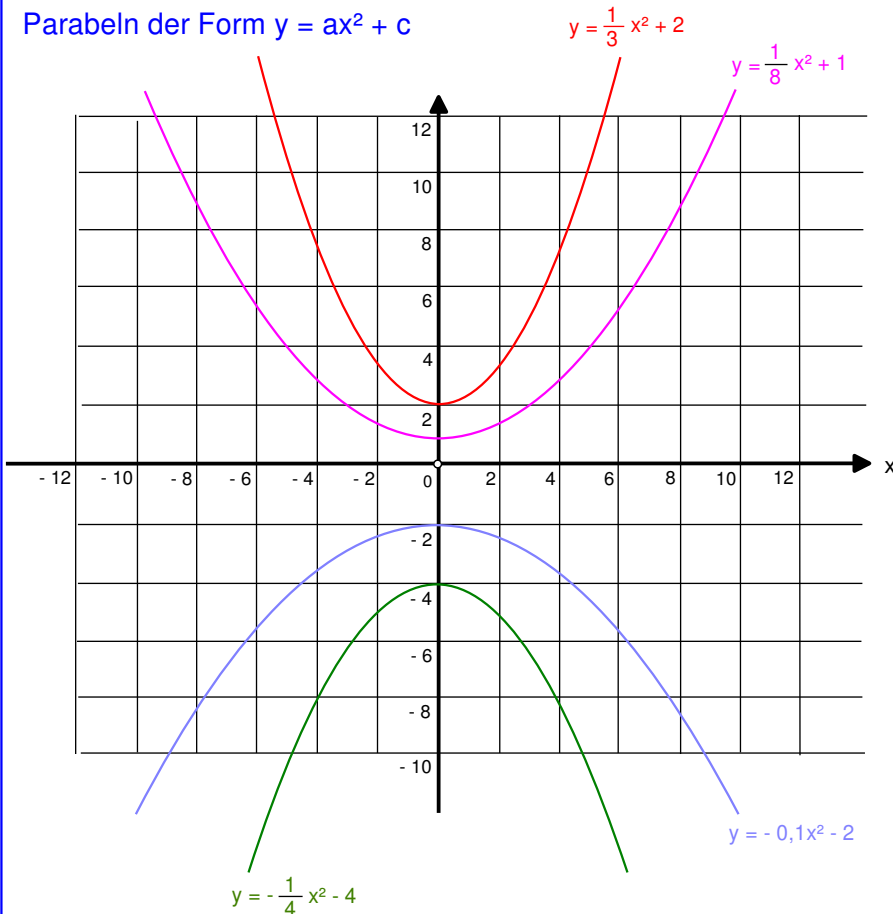
| Faktor a | Parabelform |
|-------------|---|
| positiv | die Parabel ist nach oben geöffnet |
| $0 < a < 1$ | Die Parabel ist weiter geöffnet als die Normalparabel |
| $a = 1$ | Normalparabel |
| $a > 1$ | Die Parabel ist enger als die Normalparabel |

Parabeln der Form $y = ax^2$ sind symmetrisch zur y-Achse. Ihr Scheitel S liegt im Ursprung des Koordinatensystems (0/0).

Weitere Beispiele der Form $y = ax^2$



Parabeln der Form $y = ax^2 + c$

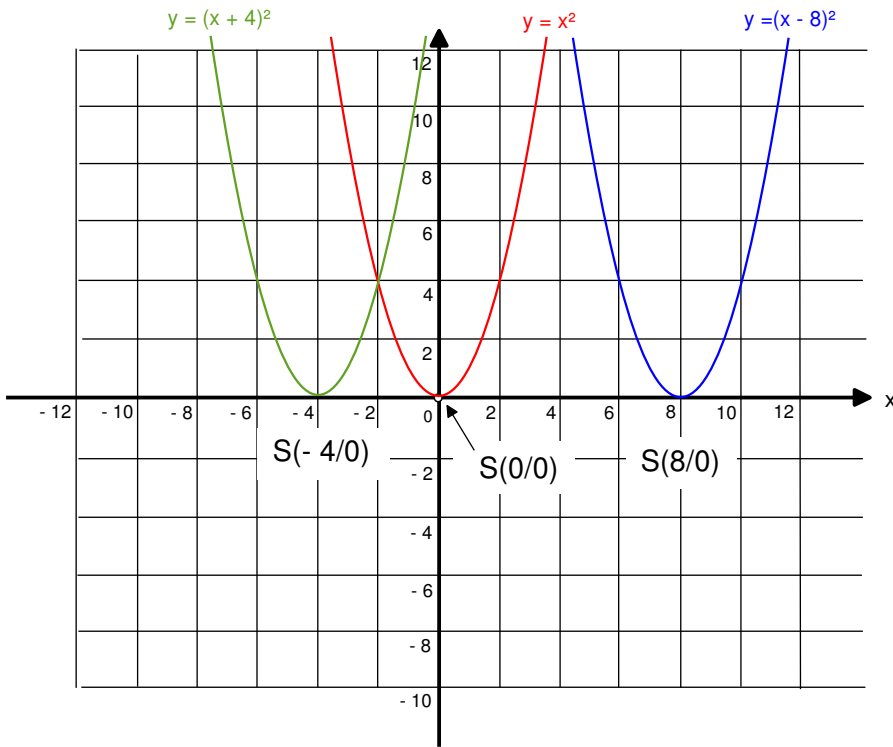


Im nebenstehenden Schaubild sind die Parabeln nach oben und nach unten entlang der y-Achse verschoben worden.

| absolutes Glied c | Verschiebung in Richtung der y-Achse |
|-------------------|--------------------------------------|
| $c > 0$ | um c Einheiten nach oben verschoben |
| $c < 0$ | um c Einheiten nach unten verschoben |

Parabeln der Form $y = ax^2$ sind symmetrisch zur y-Achse. Ihr Scheitel S liegt in $S(0/c)$.

Parabeln der Form $y = (x - d)^2$

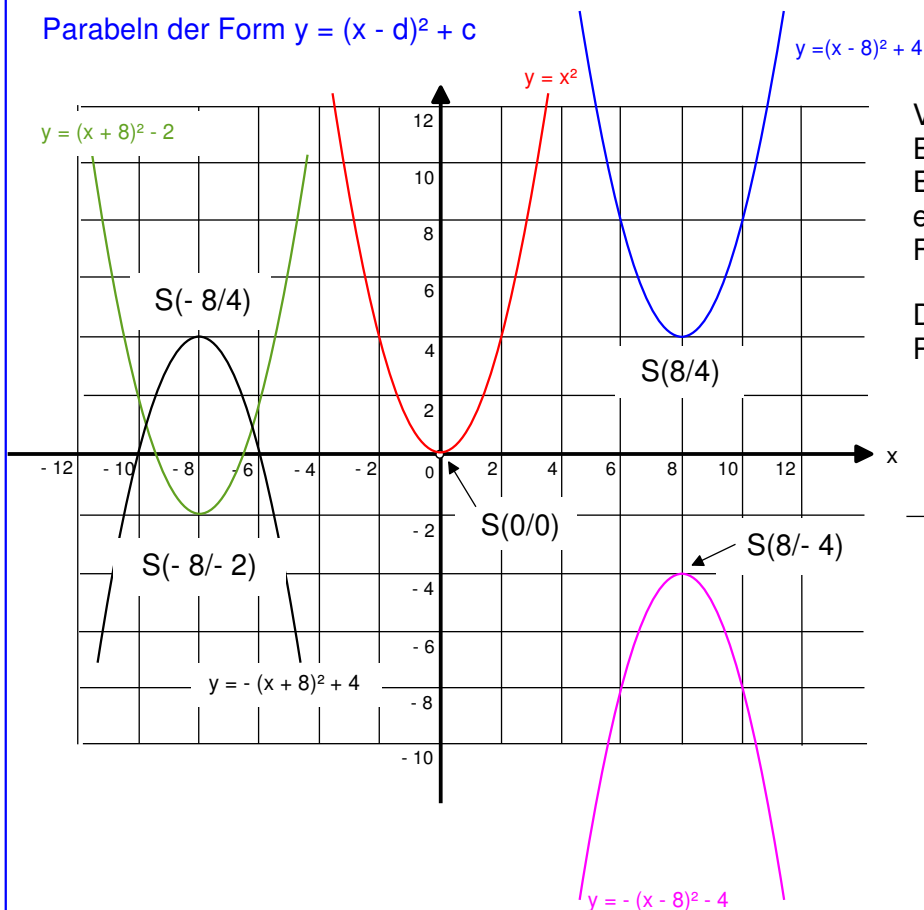


Verschiebt man eine Parabel um d Einheiten auf der x -Achse, so erhält man eine Parabel mit der allgemeinen Funktionsgleichung $y = (x - d)^2$

| Wert von d | Verschiebung in Richtung der x -Achse |
|--------------|---|
| $d > 0$ | um d Einheiten nach rechts |
| $d < 0$ | um d Einheiten nach links |

Der Scheitel der verschobenen Parabel hat die Koordinaten $S(d/0)$

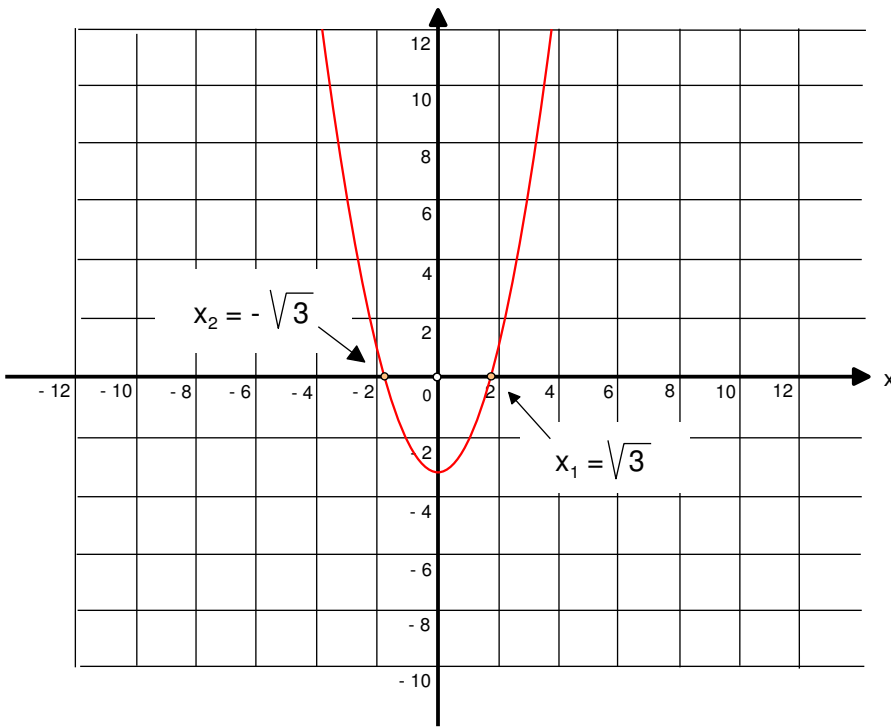
Parabeln der Form $y = (x - d)^2 + c$



Verschiebt man eine Parabel um d Einheiten auf der x -Achse und um c Einheiten in y -Richtung, so erhält man eine Parabel mit der allgemeinen Funktionsgleichung $y = (x - d)^2 + c$

Der Scheitel der verschobenen Parabel hat die Koordinaten $S(d/c)$.

| Wert von d und c | Verschiebung |
|----------------------|------------------------------|
| $d > 0$ | um d Einheiten nach rechts |
| $d < 0$ | um d Einheiten nach links |
| $c > 0$ | um c Einheiten nach oben |
| $c < 0$ | um c Einheiten nach unten |



Eine rein quadratische Gleichung lässt sich auch graphisch lösen. Dabei sind die Lösungen der Gleichung die Schnittpunkte mit der x-Achse.

$$\begin{aligned} \text{Beispiel: } 3x^2 + 50 &= 59 & | - 50 \\ 3x^2 - 9 &= 0 & | : 3 \\ x^2 - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Funktionsgleichung: $y = x^2 - 3$
 $\Rightarrow y = 0$ also $x_1 = 1,73$ v $x_2 = -1,73$

Graphische Lösungen gemischt quadratischer Gleichungen

Die Gleichung $x^2 - 0,5x - 3 = 0$ soll graphisch gelöst werden.

Zunächst muss die Gleichung umgeformt werden:

$$x^2 - 0,5x - 3 = 0 \quad | + 0,5x + 3$$

$$x^2 = 0,5x + 3$$

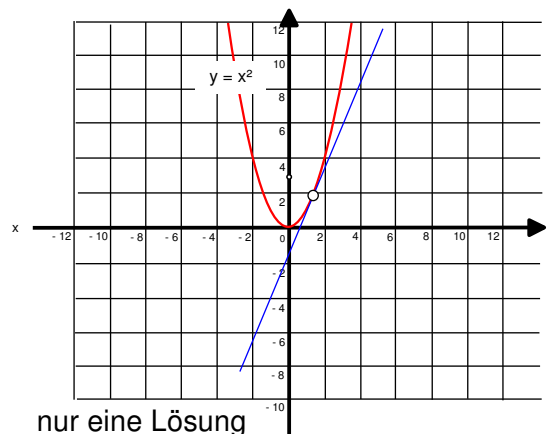
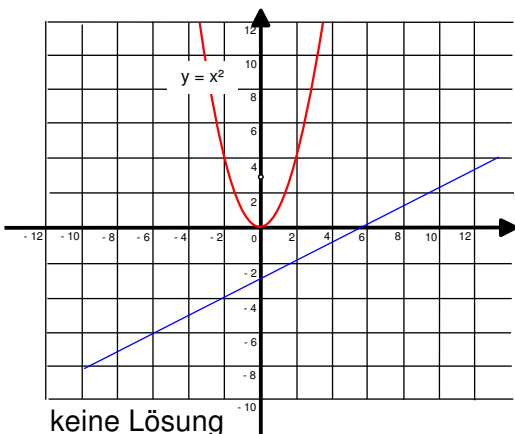
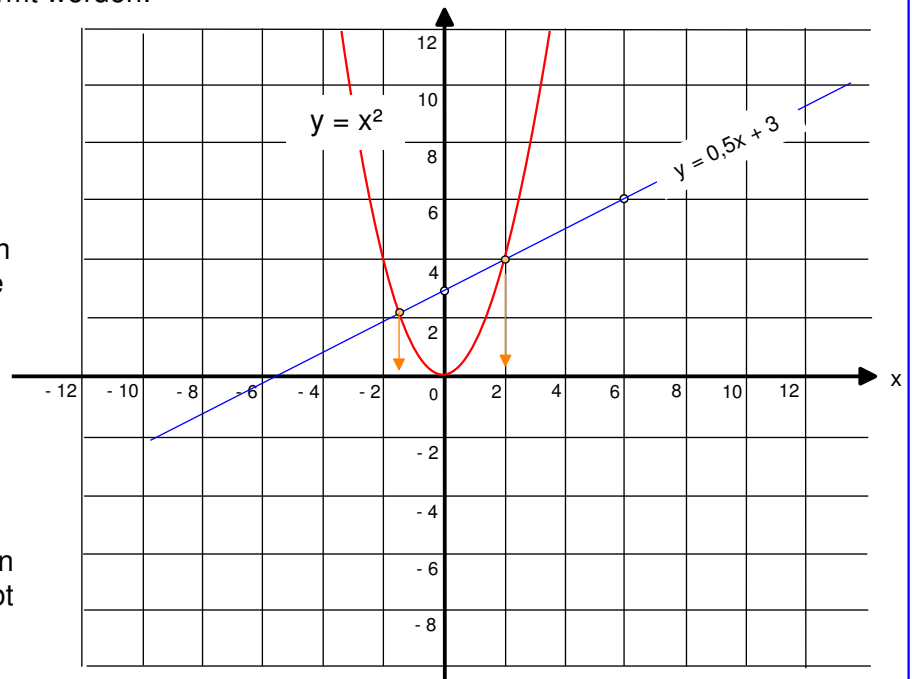
quadr. Funktion lin. Funktion

Wenn man die Graphen der Funktionen zeichnet, dann sind die Lösungen die x-Werte der Schnittpunkte beider Graphen.

$$x_1 = -1,5 \text{ und } x_2 = 2$$

Schneiden sich die Graphen nicht, so hat die Gleichung keine Lösung!

Berührt der Graph der linearen Funktion die Parabel in nur einem Punkt, so gibt es nur eine Lösung.



weitere Beispiele: graphische Lösung einer gemischt quadratischen Gleichung

$$3x^2 + x + 7 = 4x + 2x^2 + 5 \quad | -2x^2 - x - 7$$

$$3x^2 - 2x^2 = 4x - x - 7 + 5$$

$$x^2 = 3x - 2$$

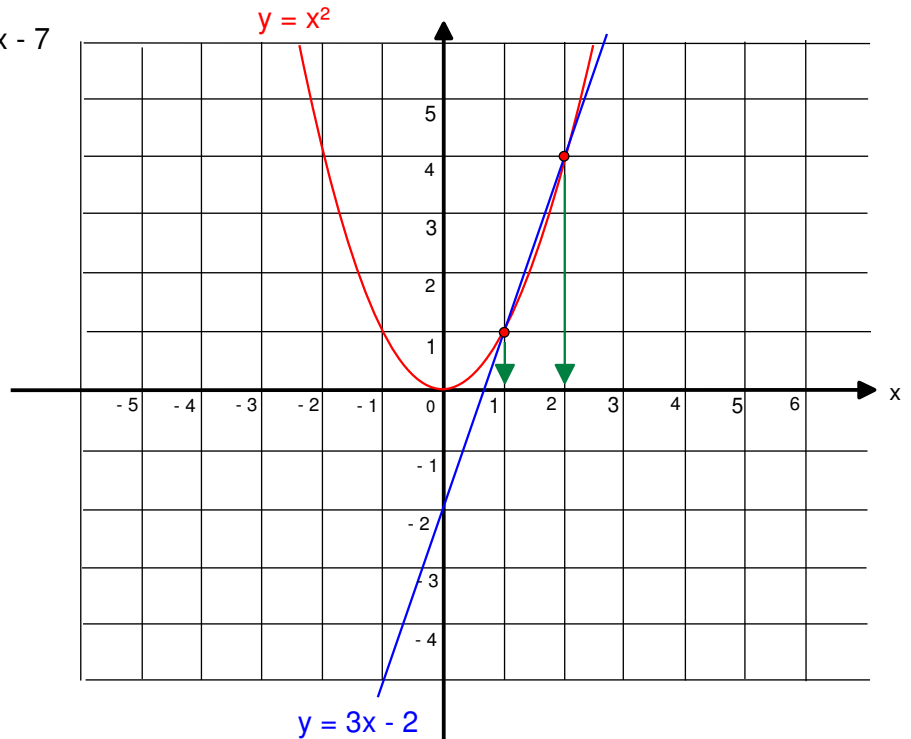
quadr. Funktion

$$y = x^2$$

lin. Funktion

$$y = 3x - 2$$

Nach der Zeichnung liefert die Gleichung die Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$



$$4x^2 + x - 16 = 0 \quad | :4$$

$$x^2 + 0,25x - 4 = 0 \quad | -0,25x + 4$$

$$x^2 = -0,25x + 4$$

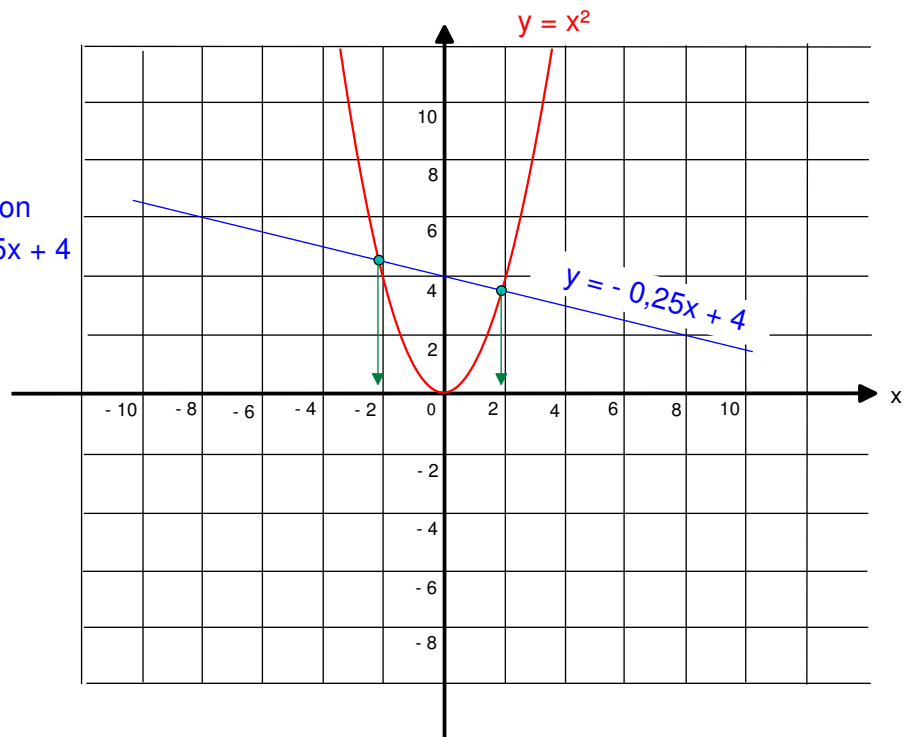
quadr. Funktion

$$y = x^2$$

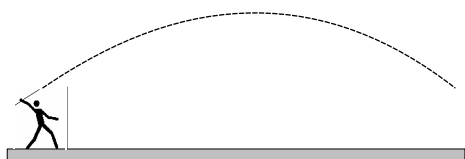
lin. Funktion

$$y = -0,25x + 4$$

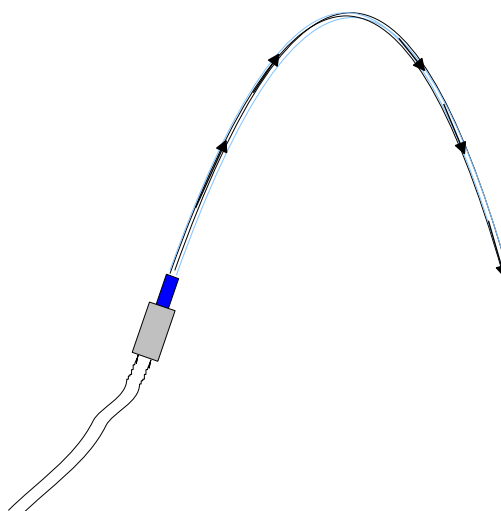
Nach der Zeichnung liefert die Gleichung die Lösungen $x_1 \sim 1,9$ und $x_2 \sim -2,1$



Die Wurfbewegung ist eine Parabel



Das Wasser folgt einer Parabel



Lösen von gemischt quadratischen Gleichungen mit Hilfe der quadratischen Ergänzung

Die quadratische Ergänzung

Die binomischen Formeln:

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$

Gegeben sei ein beliebiger quadratischer Term ohne Absolutglied in der Normalform:

$$x^2 + 6x =$$

Nun stellen wir uns folgende Frage: Welche Zahl b^2 muß man zu dem Term addieren, damit eine Form wie die erste binomische Formel entsteht?

binomische Formel:

$$x^2 + 6x + b^2 =$$

↓ ↓ ↓ Wir vergleichen nun die Gleichung (in der b gesucht ist) mit der 1. binomischen Formel

$$x^2 + 2xb + b^2 =$$

Das erste und letzte Glied sind gleich. Auch die mittleren Glieder müssen gleich sein, damit die 1. binomische Formel vorliegt. Wir müssen daher die Mittelglieder gleichsetzen:

Wir stellen die Gleichung nach b um, und erhalten $b=3$:

$$6x = 2xb \Rightarrow \underline{b = 3}$$

Damit kennen wir auch die quadratische Ergänzung: $b^2 = 9$. In der ursprünglichen Gleichung muss also 9 addiert werden, damit die 1. binomische Formel entsteht:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

Satz über die quadratische Ergänzung

Wir wollen nun eine Regel aufstellen, wie man die quadratische Ergänzung bestimmt. Dazu überlegen wir uns, wie wir die quadratische Ergänzung im Beispiel gefunden haben:

1. Wir haben das lineare Glied durch $2x$ geteilt um b zu erhalten
2. Die quadratische Ergänzung war das Quadrat dieser Zahl b .

Es gilt:

Gegeben sei eine quadratische Gleichung ohne Absolutglied in Normalform.

Dann ergibt sich die quadratische Ergänzung, indem man das lineare Glied durch $2x$ teilt, und das Ergebnis quadriert.

Einige Beispiele:

- a) $x^2 + 8x + 4^2 = (x + 4)^2$
- b) $x^2 + 15x + 7,5^2 = (x + 7,5)^2$
- c) $x^2 + 0,24x + 0,12^2 = (x + 0,12)^2$
- d) $x^2 - 5x + 2,5^2 = (x - 2,5)^2$
- e) $x^2 - 122x + 61^2 = (x - 61)^2$

Anwendungen / Beispiele

$$1) x^2 - 24x + 135 = 0 \quad | - 135$$

$$x^2 - 24x = -135 \quad | + 12^2 \text{ (quadr. Ergänzung)}$$

$$x^2 - 24x + 12^2 = -135 + 12^2$$

$$(x - 12)^2 = -135 + 144 = 9 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x - 12 = 3 \vee x - 12 = -3$$

$$x_1 = 3 + 12 = 15$$

$$x_2 = -3 + 12 = 9$$

$$2) 3x^2 + x + 7 = 4x + 2x^2 + 5 \quad | - 2x^2 - 4x - 7$$

$$x^2 - 3x = -2 \quad | + 1,5^2 \text{ (quadr. Ergänzung)}$$

$$x^2 - 3x + 1,5^2 = -2 + 1,5^2$$

$$(x - 1,5)^2 = -2 + 2,25 = 0,25 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x - 1,5 = 0,5 \vee x - 1,5 = -0,5$$

$$x_1 = 1,5 + 0,5 = 2$$

$$x_2 = 1,5 - 0,5 = 1$$

$$3) (3y + 2)^2 + 21 = 12y$$

$$9y^2 + 12y + 4 + 21 = 12y \quad | - 12y - 4 - 21$$

$$9y^2 = -25$$

Da man aus einer neg. Zahl keine Wurzel ziehen kann, hat diese Aufgabe keine Lösung!

$$IL = \{\emptyset\}$$

$$4) 1 - 4(2x + 1) = (x + 2)(x - 2) + 8$$

$$1 - 8x - 4 = x^2 - 4 + 8 \quad | - x^2 + 4 - 1$$

$$-x^2 - 8x = 7 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^2 + 8x = -7 \quad | + 4^2 \text{ (quadr. Ergänzung)}$$

$$x^2 + 8x + 4^2 = -7 + 4^2$$

$$(x + 4)^2 = -7 + 16 = 9 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x + 4 = 3 \vee x + 4 = -3$$

$$x_1 = 3 - 4 = -1$$

$$x_2 = -3 - 4 = -7$$

$$5)^* \frac{4}{x-1} + \frac{1}{x-4} = \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x-3} \quad | \cdot (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$\frac{4 \cdot \cancel{(x-1)}(x-2)(x-3)(x-4)}{\cancel{x-1}} + \frac{1 \cdot \cancel{(x-1)}(x-2)(x-3)\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}} = \frac{3 \cdot \cancel{(x-1)}(x-2)(x-3)(x-4)}{\cancel{x-2}} + \frac{2 \cdot \cancel{(x-1)}(x-2)\cancel{(x-3)}(x-4)}{\cancel{x-3}}$$

$$4(x^2 - 3x - 2x + 6)(x-4) + (x^2 - 2x - x + 2)(x-3) = 3(x^2 - 3x - x + 3)(x-4) + 2(x^2 - 2x - x + 2)(x-4)$$

$$4(x^2 - 5x + 6)(x-4) + (x^2 - 3x + 2)(x-3) = 3(x^2 - 4x + 3)(x-4) + 2(x^2 - 3x + 2)(x-4)$$

$$4(x^3 - 5x^2 + 6x - 4x^2 + 20x - 24) + x^3 - 3x^2 + 2x - 3x^2 + 9x - 6 = 3(x^3 - 4x^2 + 3x - 4x^2 + 16x - 12) + 2(x^3 - 3x^2 + 2x - 4x^2 + 12x - 8)$$

$$4(x^3 - 9x^2 + 26x - 24) + x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 3(x^3 - 8x^2 + 19x - 12) + 2(x^3 - 7x^2 + 14x - 8)$$

$$4x^3 - 36x^2 + 104x - 96 + x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 3x^3 - 24x^2 + 57x - 36 + 2x^3 - 14x^2 + 28x - 16$$

$$-42x^2 + 115x - 102 = -38x^2 + 85x - 52$$

$$-4x^2 + 30x = 50 \quad | : (-4)$$

$$x^2 - 7,5x = -12,5 \quad | + 3,75^2 \text{ (quadr. Ergänzung)}$$

$$x^2 - 7,5x + 3,75^2 = -12,5 + 3,75^2$$

$$(x - 3,75)^2 = -12,5 + 14,0625 = 1,5625 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x - 3,75 = 1,25 \vee x - 3,75 = -1,25$$

$$x_1 = 1,25 + 3,75 = 5$$

$$x_2 = -1,25 + 3,75 = 2,5$$

$$6) 3x^2 - 7x = 16 \quad | : 3$$

$$x^2 - \frac{7}{3}x = \frac{16}{3} \quad | + \left(\frac{7}{6}\right)^2 \text{ (quadr. Ergänzung)}$$

$$x^2 - \frac{7}{3}x + \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{16}{3} + \left(\frac{7}{6}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 = \frac{16}{3} + \frac{49}{36} = \frac{192 + 49}{36} = \frac{241}{36} \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x - \frac{7}{6} = +\frac{1}{6}\sqrt{241} \quad \vee \quad x - \frac{7}{6} = -\frac{1}{6}\sqrt{241}$$

$$x_1 = \frac{7}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{241} = 3,754$$

$$x_2 = \frac{7}{6} - \frac{1}{6}\sqrt{241} = -1,421$$

Lösungsformel für gemischt-quadratische Gleichungen

Allgemein gilt: $x^2 + px + q = 0 \quad | -q$

$$x^2 + px = -q \quad | + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \text{ (quadr. Ergänzung)}$$

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beispiel: $3x^2 - 54x - 189 = 0 \quad | :3$

$$x^2 - 18x - 63 = 0$$

\downarrow \downarrow
p **q**

$$x_{1/2} = \frac{18}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{18}{2}\right)^2 + 63}$$

$$x_{1/2} = 9 \pm 12$$

$$x_1 = 21 \quad \vee \quad x_2 = -3$$

Anzahl der Lösungen bei gemischt-quadratischen Gleichungen

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_D}$$

In der Lösungsformel nennt man den Radikanden (Term unter der Wurzel) die **Diskriminante D**.

Von der Diskriminante D hängt die Zahl der Lösungen ab!

- ist D positiv, so hat die Gleichung zwei Lösungen
- ist D gleich Null, so hat die Gleichung eine Lösung
- ist D negativ, so hat die Gleichung keine Lösung

Satz des Viète

Einer der Mitbegründer der Algebra war der französische Mathematiker Francois Vieta. Er formulierte als erster einen Zusammenhang zwischen den Lösungen einer gemischt-quadratischen Gleichung und den Koeffizienten p und q. Es gilt: $-(x_1 + x_2) = p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$



Francois Vieta
1540 - 13.12.1603, Paris

Beispiele zur Anwendung von quadr. Gleichungen

1) Addiert man zum Quadrat einer Zahl das Quadrat der um eins kleineren Zahl, so erhält man 4141.

die gesuchte Zahl sei x

$$x^2 + (x - 1)^2 = 4141$$

$$x^2 + x^2 - 2x + 1 = 4141 \quad | -1$$

$$2x^2 - 2x = 4141 - 1 = 4140 \quad | :2$$

$$x^2 - x = 2070 \quad | + 0,5^2 \text{ (quadr. Ergänzung)}$$

$$x^2 - x + 0,5^2 = 2070 + 0,5^2$$

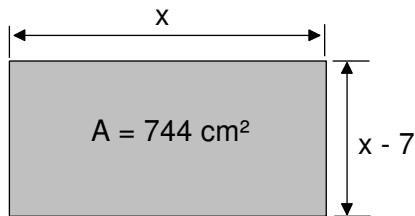
$$(x - 0,5)^2 = 2070,25 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x - 0,5 = 45,5 \quad \vee \quad x - 0,5 = -45,5$$

$$x_1 = 46 \quad \vee \quad x_2 = -45$$

Die eine Zahl heißt 46 und die andere Zahl heißt 45
bzw. die eine Zahl heißt -45 und die andere Zahl heißt -46.

- 2) Die Seitenlängen einer rechteckigen Fläche unterscheiden sich um 7 cm. Der Flächeninhalt beträgt 744 cm². Welchen Umfang hat die Fläche?



$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } x(x-7) &= 744 \\ x^2 - 7x &= 744 \quad | -744 \\ x^2 - 7x - 744 &= 0 \\ p &= -7; q = -744 \\ x_{1/2} &= 3,5 \pm \sqrt{3,5^2 + 744} \\ x_1 &= 31 \quad \vee \quad x_2 = -24 \end{aligned}$$

Die eine Seite des Rechtecks ist 31 cm lang und die andere Seite ist 24 cm lang. Der Umfang des Rechtecks beträgt somit $2 \cdot 31 + 2 \cdot 24 = 110$ cm.

- 3) Das abgebildete Trapez hat einen Flächeninhalt von 2,8 a. Berechne die obere Trapezseite und die Höhe.

$$\text{Da } 1 \text{ a} = 100 \text{ m}^2 \Rightarrow 2,8 \text{ a} = 280 \text{ m}^2$$

$$\text{Für die Fläche eines Trapezes gilt: } A = \frac{a+c}{2} h$$

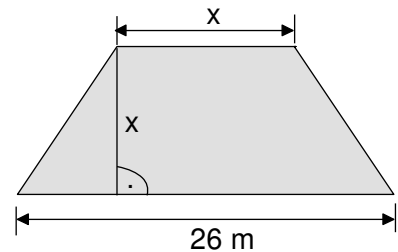
$$\text{also: } \frac{26+x}{2} \cdot x = 280 \quad | \cdot 2$$

$$x(26+x) = 560 \quad | -560$$

$$x^2 + 26x - 560 = 0 \quad p = 26; q = -560$$

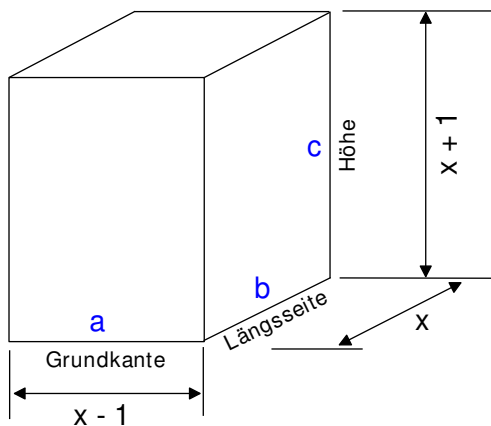
$$x_{1/2} = -13 \pm \sqrt{169 + 560}$$

$$x_1 = 14 \quad \vee \quad x_2 = -40$$



Das Trapez hat eine Höhe von 14 m und die obere Trapezseite beträgt auch 14 m.

- 4) Eine quaderförmige Verpackung hat einen Oberflächeninhalt von 598 cm². Die kürzere Grundseite ist 1 cm kürzer als die Längsseite. Die Höhe der Schachtel ist um 1 cm größer als die Längsseite. Berechne das Volumen der Verpackung.



Die Längsseite sei x cm lang

Die Oberfläche eines Quaders berechnet sich nach:

$$O = 2ab + 2ac + 2bc$$

$$\text{also gilt: } 2(x-1)x + 2(x-1)(x+1) + 2x(x+1) = 598$$

$$2x^2 - 2x + 2(x^2 - 1) + 2x^2 + 2x = 598$$

$$2x^2 - 2x + 2x^2 - 2 + 2x^2 + 2x = 598$$

$$6x^2 - 2 = 598 \quad | +2$$

$$6x^2 = 600 \quad | :6$$

$$x^2 = 100 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x_1 = 10 \quad \vee \quad x_2 = -10$$

Die Schachtel ist 9 cm lang, 10 cm breit und 11 cm hoch.
Das Volumen beträgt also $V = 9 \cdot 10 \cdot 11 = 990$ cm³

- 5) Berechne die Seitenlängen des Dreiecks und den Flächeninhalt der Figur. (Längenangaben in cm)

$$(x+3)^2 = (x-3)^2 + x^2$$

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 - 6x + 9 + x^2$$

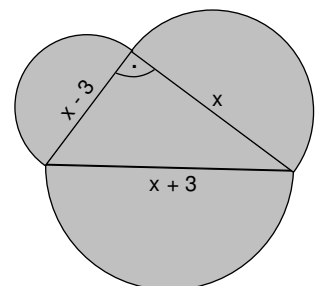
$$-x^2 + 12x = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^2 - 12x = 0$$

$$x(x-12) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = 12$$

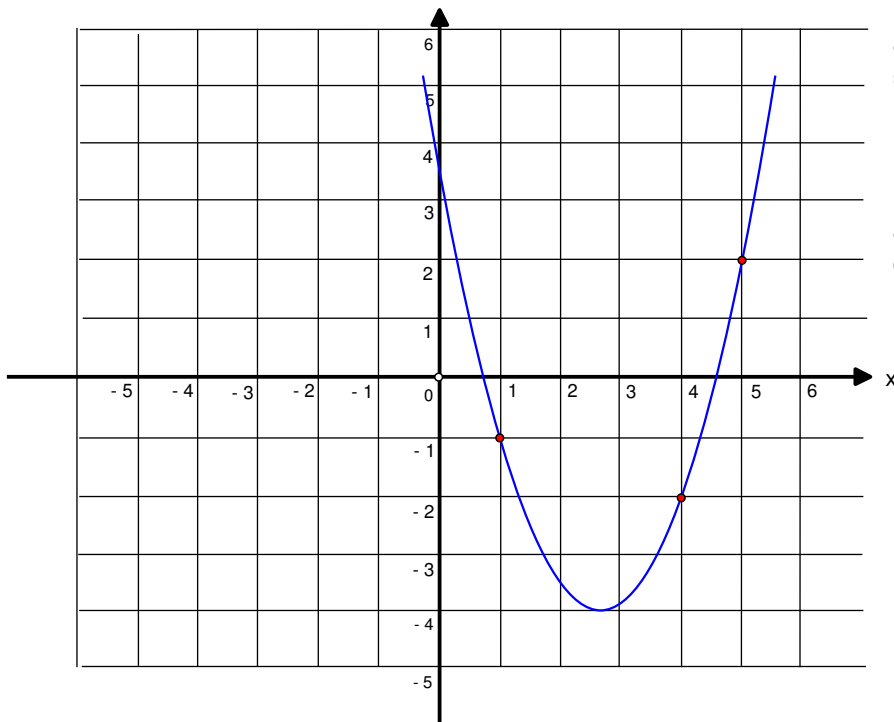
Seitenlängen: a = 12 cm, b = 9 cm, c = 15 cm

$$A = \frac{12 \cdot 9}{2} + 6^2 \text{ JI} + 4,5^2 \text{ JI} + 7,5^2 \text{ JI} = \underline{407,25 \text{ cm}^2}$$



Bestimmen der Parabelgleichung durch drei gegebene Punkte auf der Parabel

Bestimme die Funktionsgleichung der parabel, die durch die Punkte $P_1(1/-1)$, $P_2(4/-2)$ und $P_3(5/2)$ verläuft.



allgemein gilt: $y = ax^2 + bx + c$

=>

$$P_1: -1 = a + b + c$$

$$P_2: -2 = 16a + 4b + c$$

$$P_3: 2 = 25a + 5b + c$$

aus Gl. (1) folgt: $c = -a - b - 1$

eingesetzt in Gl. (2) und Gl. (3) =>

$$16a + 4b - a - b - 1 = -2$$

$$25a + 5b - a - b - 1 = 2$$

zusammenfassen:

$$\begin{array}{r} 15a + 3b = -1 \\ 24a + 4b = 3 \end{array} \left| \begin{array}{l} \cdot 4 \\ \cdot 3 \end{array} \right.$$

$$60a + 12b = -4$$

$$- [72a + 12b = 9]$$

$$\hline -12a = -13$$

$$\Rightarrow a = \frac{13}{12}$$

$$15 \cdot \frac{13}{12} + 3b = -1$$

$$16,25 + 3b = -1$$

$$b = -5,75 \quad \text{aus Gl. (1) folgt: } c = -1 - a - b = -1 - \frac{13}{12} + 5,75 = 3 \frac{2}{3}$$

also lautet die Funktionsgleichung: $y = \frac{13}{12}x^2 - 5,75x + 3 \frac{2}{3}$

$$y = \frac{13}{12}x^2 - 5,75x + 3 \frac{2}{3} \quad \left| -3 \frac{2}{3} \right.$$

$$y - 3 \frac{2}{3} = \frac{13}{12}x^2 - 5,75x \quad \left| \cdot \frac{12}{13} \right.$$

$$\frac{12}{13}y - 3 \frac{5}{13} = x^2 - 5 \frac{4}{13}x \quad \left| + \left(2 \frac{17}{26}\right)^2 \right.$$

$$\frac{12}{13}y - 3 \frac{5}{13} + \frac{4761}{676} = \left(x - 2 \frac{17}{26}\right)^2$$

$$\frac{12}{13}y + \frac{2473}{676} = \left(x - 2 \frac{17}{26}\right)^2 \quad \left| \cdot \frac{13}{12} \right.$$

$$y + \frac{2473}{624} = \frac{13}{12} \left(x - 2 \frac{17}{26}\right)^2 \quad \left| - \frac{2473}{624} \right.$$

$$y = \frac{13}{12} \left(x - 2 \frac{17}{26}\right)^2 - 3 \frac{601}{624}$$

Die Parabel ist etwas schmalere als die Normalparabel. Sie ist nach oben ge6ffnet. Ihr Minimum liegt bei $S\left(2 \frac{17}{26} / 3 \frac{601}{624}\right)$

Allgem. Lösungsformel von quadr. Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad | : a$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad | - \frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad | + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x_{1/2} + \frac{b}{2a} = \pm \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Beispiel: $3x^2 - 7x - 16 = 0$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a & b & c \end{array}$$

$$x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x_{1/2} = \frac{7}{6} \pm \frac{1}{6} \sqrt{49 - 4 \cdot 3 \cdot (-16)}$$

$$x_{1/2} = \frac{7}{6} \pm 2,59$$

$$x_1 = 3,75$$

$$x_2 = -1,42$$

1) Forme die gegebenen Gleichungen mit Hilfe der binomischen Formeln um und bestimme folgendes:

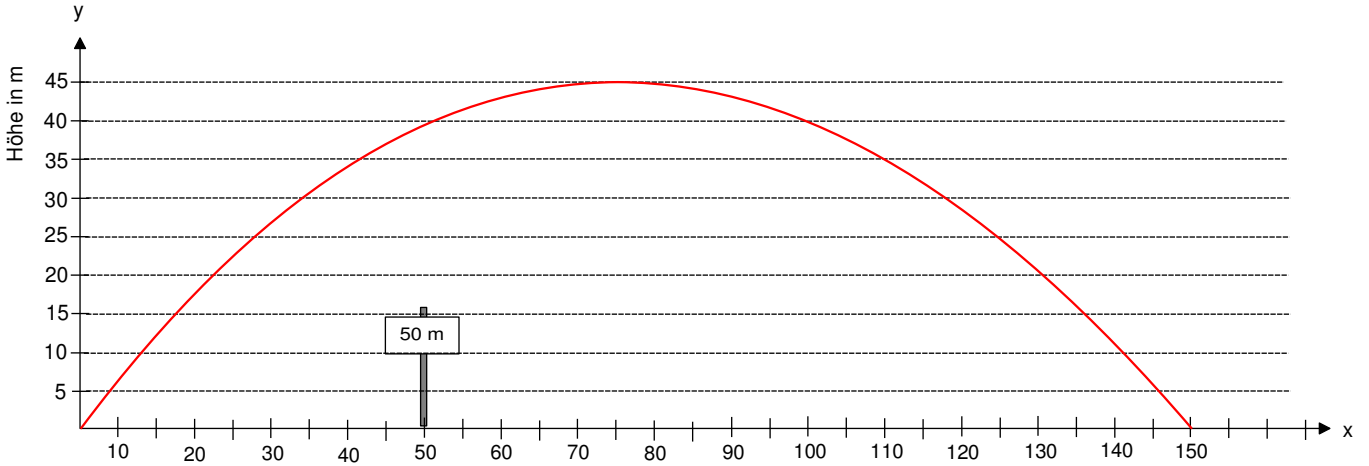
- Min oder Max mit den zugehörigen Koordinaten
- ist die Parabel nach oben oder nach unten geöffnet?
- ist sie wie die NP oder gestaucht bzw. gestreckt.

a) $y = x^2 + 12x + 36$ b) $y = x^2 - 8x + 19$ c) $y = -1,5x^2 - 2x + 4$

2) Löse folgende Gleichungen

a) $3x^2 - 13 = 4(3 - x^2)$ b) $0,5x^2 + 3 = 2x + 3$ c) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2 = 0$ d) $(x + 2)^2 - (x - 7)^2 = x^2$
 e) $1 - 4(2x + 1) = (x + 2)(x - 2) + 8$

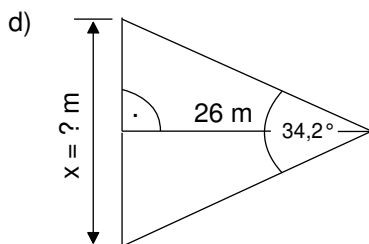
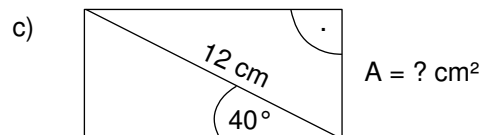
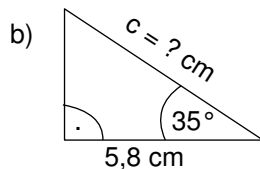
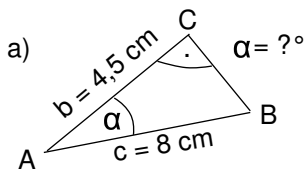
3) Beim Golfspielen kann die Flugbahn des Golfballs durch eine Parabel beschrieben werden.



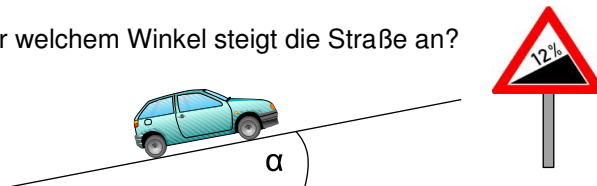
- a) Welche Höhe erreicht der Golfball maximal?
 b) Wie weit fliegt der Golfball?
 c) Eine der folgenden Funktionsgleichungen gehört zu der oben dargestellten Parabel. Ist es A, B oder C?
 d) Begründe, warum die anderen Funktionsgleichungen nicht zu der Parabel gehören.
 e) Eine andere Flugbahn kann durch die Gleichung $y = -0,004x^2 + 0,5x$ beschrieben werden.
 - In welcher Höhe befindet sich der Golfball über der 50m Markierung?
 - Wie hoch fliegt der Golfball maximal?
 - Wie weit fliegt der Golfball?
 f) Ein Ball, dessen Flugbahn ebenfalls durch eine Parabel beschrieben werden kann, erreicht seine maximale Höhe über der 50m Markierung. In welcher Entfernung vom Abschlag landet er?

- | | |
|---|------------------------|
| A | $y = -0,008x^2 + 1,2x$ |
| B | $y = -0,05x$ |
| C | $y = 0,18x^2$ |

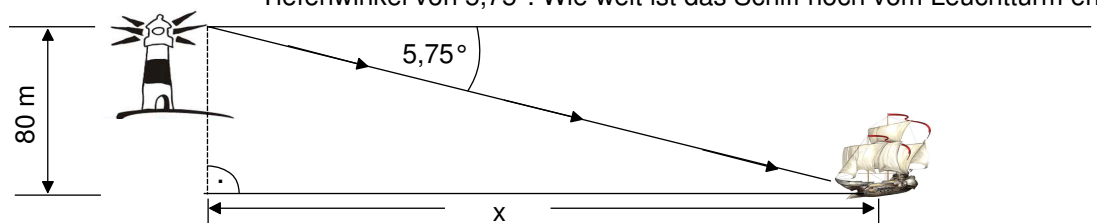
6) Berechne das jeweils fehlende Stück.



e) Unter welchem Winkel steigt die Straße an?



f) Von einem 80m hohen Leuchtturm sieht man ein Schiff unter einem Tiefenwinkel von $5,75^\circ$. Wie weit ist das Schiff noch vom Leuchtturm entfernt?



Lösungen / Bewertung

1) a) $y = x^2 + 12x + 36 \mid + 6^2$
 $y + 6^2 = x^2 + 12x + 6^2 + 36$
 $y + 6^2 = (x + 6)^2 + 36 \mid - 6^2$
 $y = (x + 6)^2$ **3 P**
 - nach oben geöffnet
 - wie die NP
 - Min (- 6 / 0) **3 P**

b) $y = x^2 - 8x + 19 \mid - 19$
 $y - 19 = x^2 - 8x \mid + 4^2$
 $y - 19 + 4^2 = x^2 - 8x + 4^2$
 $y - 3 = (x - 4)^2 \mid + 3$
 $y = (x - 4)^2 + 3$ **3 P**
 - nach oben geöffnet
 - wie die NP
 - Min (4 / 3) **3 P**

c) $y = -1,5x^2 - 2x + 4 \mid : -1,5$
 $\frac{y}{-1,5} = x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} \mid + \left(\frac{4}{6}\right)^2$
 $\frac{y}{-1,5} + \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{8}{3} \mid - \left(\frac{4}{6}\right)^2$
 $\frac{y}{-1,5} = \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - 3\frac{1}{9} \mid \cdot (-1,5)$
 $y = -1,5 \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + 4\frac{2}{3}$ **4 P**
 - nach unten geöffnet
 - gestaucht
 - Max $\left(-\frac{2}{3} / 4\frac{2}{3}\right)$ **3 P**

2) a) $3x^2 - 13 = 4(3 - x^2)$
 $3x^2 - 13 = 12 - 4x^2 \mid + 4x^2 + 13$
 $7x^2 = 25$
 $x^2 = 3\frac{4}{7} \mid \sqrt{\quad}$
 $x_1 = 1,89$ v
 $x_2 = -1,89$ **4 P**

b) $0,5x^2 + 3 = 2x + 3$
 $0,5x^2 - 2x = 0$
 $x(0,5x - 2) = 0$
 $x_1 = 0$ v
 $x_2 = 4$ **4 P**

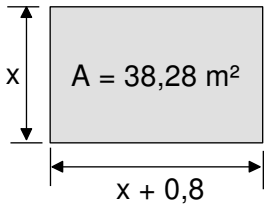
c) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2 = 0 \mid \cdot \frac{4}{3}$
 $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} = 0 \mid + \frac{8}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2$
 $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} \mid \sqrt{\quad}$
 $x - \frac{1}{3} = \pm \frac{5}{3}$
 $x_1 = 2$ v $x_2 = -1\frac{1}{3}$ **5 P**

d) $(x + 2)^2 - (x - 7)^2 = x^2$
 $x^2 + 4x + 4 - (x^2 - 14x + 49) = x^2$
 $x^2 + 4x + 4 - x^2 + 14x - 49 = x^2$
 $-x^2 + 18x = 45 \mid \cdot (-1)$
 $x^2 - 18x = -45 \mid + 9^2$
 $x^2 - 18x + 9^2 = 36$
 $(x - 9)^2 = 36 \mid \sqrt{\quad}$
 $x - 9 = \pm 6$
 $x_1 = 15$ v $x_2 = 3$ **6 P**

e) $1 - 4(2x + 1) = (x + 2)(x - 2) + 8$
 $1 - 8x - 4 = x^2 - 4 + 8$
 $-x^2 - 8x = 7$
 $x^2 + 8x = -7$
 $x^2 + 8x + 4^2 = 9$
 $(x + 4)^2 = 9 \mid \sqrt{\quad}$
 $x + 4 = \pm 3$
 $x_1 = -1$ v $x_2 = -7$ **5 P**

- 3) a) Welche Höhe erreicht der Golfball maximal? Er erreicht eine Höhe von 45 m maximal. 1 P A $y = -0,008x^2 + 1,2x$
- b) Wie weit fliegt der Golfball? Er fliegt 150m weit. 1 P B $y = -0,05x$
- c) Eine der folgenden Funktionsgleichungen gehört zu der oben dargestellten Parabel. Ist es A, B oder C? Es ist die Funktion A. 2 P C $y = 0,18x^2$
- d) Begründe, warum die anderen Funktionsgleichungen nicht zu der Parabel gehören. Die Funktion B ist eine lineare Funktion und die Funktion C ist nach oben geöffnet. 2 P
- e) Eine andere Flugbahn kann durch die Gleichung $y = -0,004x^2 + 0,5x$ beschrieben werden.
 - In welcher Höhe befindet sich der Golfball über der 50m Markierung?
 $y = -0,004 \cdot 50^2 + 0,5 \cdot 50 = 15$ - Die Höhe beträgt 15 m **2 P**
 - Wie hoch fliegt der Golfball maximal?
 $\frac{y}{-0,004} = x^2 - 125x \mid + 62,5^2$
 $\frac{y}{-0,004} + 62,5^2 = (x - 62,5)^2$
 $\frac{y}{-0,004} = (x - 62,5)^2 - 3906,25 \mid \cdot (-0,004)$
 $y = -0,004(x - 62,5)^2 + 15,625$
Der Golfball fliegt maximal 15,625 m hoch 2 P
 - Wie weit fliegt der Golfball?
 $y = 0 \Rightarrow -0,004(x - 62,5)^2 + 15,625 = 0$
 $(x - 62,5)^2 = \frac{15,625}{0,004} = 3906,25 \mid \sqrt{\quad}$
 $x - 62,5 = \pm 62,5$
 $x_1 = 125$ v $x_2 = 0$ Der Golfball fliegt 125 m weit 2 P

4) Ein Zimmer ist um 0,8 m länger als breit und hat eine Fläche von 38,28 m². Wie groß ist der Umfang des Zimmers?



$$x(x + 0,8) = 38,28 \quad | + 0,4^2$$

$$x^2 + 0,8x + 0,4^2 = 38,28 + 0,16 = 38,44$$

$$(x + 0,4)^2 = 38,44 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x + 0,4 = \pm 6,2$$

$$x_1 = 5,8 \quad \vee \quad x_2 = -6,6$$

Das Zimmer ist 5,8 m breit und 6,6 m lang. Der Umfang beträgt $U = 2 \cdot 5,8 + 2 \cdot 6,6 = 24,8 \text{ m}$ **6 P**

5) Vergrößert man in dem Produkt $17 \cdot 27$ jeden Faktor um dieselbe Zahl, so hat das Produkt den Wert 675.

$$(17 + x) \cdot (27 + x) = 675 \qquad \text{Probe: } (17 + 4,458) \cdot (27 + 4,458) = 675$$

$$459 + 17x + 27x + x^2 = 675$$

$$x^2 + 44x = 216$$

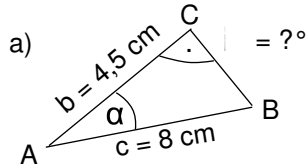
$$x^2 + 44x + 22^2 = 216 + 22^2 = 700$$

$$(x + 22)^2 = 700 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x + 22 = \pm 26,458$$

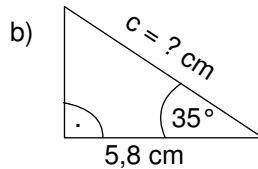
$$x_1 = -48,458 \quad \vee \quad x_2 = 4,458 \quad \mathbf{4 P}$$

6) Berechne das jeweils fehlende Stück.



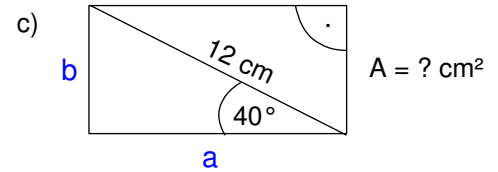
$$\cos \alpha = \frac{4,5}{8}$$

$$\Rightarrow \alpha = 55,77^\circ \quad \mathbf{2 P}$$



$$\cos 35^\circ = \frac{5,8}{c}$$

$$\Rightarrow c = 5,8 : \cos 35^\circ = 7,08 \text{ cm} \quad \mathbf{2 P}$$

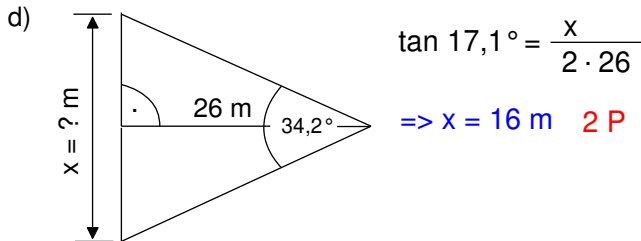


$$\cos 40^\circ = \frac{a}{12}$$

$$\Rightarrow a = 12 \cdot \cos 40^\circ = 9,19 \text{ cm} \quad \mathbf{2 P}$$

$$b = \sqrt{12^2 - 9,19^2} = 7,71 \text{ cm}$$

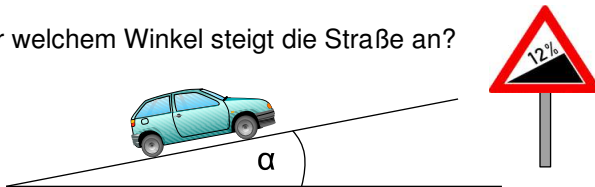
$$A = 9,19 \cdot 7,71 = 70,85 \text{ cm}^2 \quad \mathbf{2 P}$$



$$\tan 17,1^\circ = \frac{x}{2 \cdot 26}$$

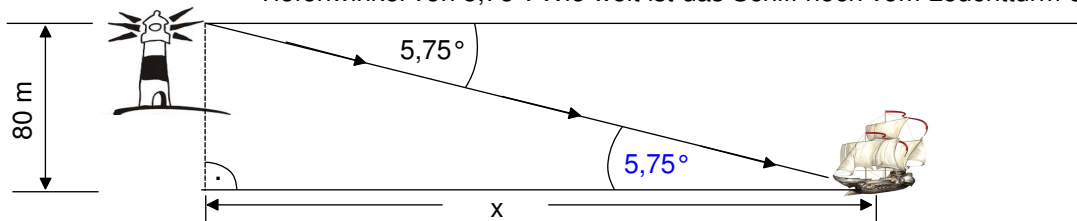
$$\Rightarrow x = 16 \text{ m} \quad \mathbf{2 P}$$

e) Unter welchem Winkel steigt die Straße an?



$$\tan \alpha = \frac{12}{100} \Rightarrow \alpha = 6,84^\circ \quad \mathbf{2 P}$$

f) Von einem 80m hohen Leuchtturm sieht man ein Schiff unter einem Tiefenwinkel von 5,75°. Wie weit ist das Schiff noch vom Leuchtturm entfernt?



$$\tan 5,75^\circ = \frac{80}{x} \Rightarrow x = 80 : \tan 5,75^\circ = 794,5 \text{ m} \quad \mathbf{3 P}$$

Gesamt: 80 P